4. Πολυβηματικές μέθοδοι

Ασκήσεις

4.1 Προσδιορίστε τα $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, ώστε η διβηματική μέθοδος

$$\alpha_2 y^{n+2} + \alpha_1 y^{n+1} + \alpha_0 y^n = hf^{n+2}$$

να έχει τάξη ακρίβειας δύο. Είναι η μέθοδος που προκύπτει ευσταθής;

4.2 Αποδείξτε τη σχέση

$$C_j = \frac{1}{j!}\big(\alpha_1 + 2^j\alpha_2 + \dots + k^j\alpha_k\big) - \frac{1}{(j-1)!}\big(\beta_1 + 2^{j-1}\beta_2 + \dots + k^{j-1}\beta_k\big), \quad j \ge 2,$$

που δίνεται λίγο πριν την (4.49).

4.4 Έστω $y^0 := 0, y^1 := 1$, και $y^{n+2} := y^{n+1} + y^n, n \in \mathbb{N}_0$. Δώστε σε κλειστή μορφή τον $n-$στό όρο της ακολουθίας $(y^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Η ακολουθία αυτή είναι γνωστή ως *ακολουθία του Fibonacci*.

4.5 Αν χρησιμοποιήσουμε ως μέθοδο πρόβλεψης τη μέθοδο του Euler και ως μέθοδο διόρθωσης τη μέθοδο του τραπεζίου, δηλαδή το ζεύγος (i) της παραγράφου 4.5, και κάνουμε μία μόνο διόρθωση σε κάθε βήμα, οδηγούμαστε στην εξής μέθοδο

$$\begin{cases} y^0 := y_0 \\ y^{n+1} := y^n + \dfrac{h}{2}\big[f(t^n, y^n) + f\big(t^{n+1}, y^n + hf(t^n, y^n)\big)\big], \quad n \ge 0. \end{cases}$$

Προσδιορίστε την τάξη ακρίβειας αυτής της μεθόδου και αποδείξτε ευστάθεια και σύγκλιση.

4.6 Προσδιορίστε τους συντελεστές $\alpha_1, \alpha_0, \beta_2, \beta_1, \beta_0$ της γενικής διβηματικής μεθόδου με βήμα

$$y^{n+2} + \alpha_1 y^{n+1} + \alpha_0 y^n = h\big(\beta_2 f^{n+2} + \beta_1 f^{n+1} + \beta_0 f^n\big)$$

έτσι ώστε η τάξη ακρίβειάς της p να είναι τουλάχιστον δύο, τουλάχιστον τρία, και τουλάχιστον τέσσερα, αντίστοιχα. Υπάρχει μέθοδος με $p = 4$; Υπάρχει μέθοδος με $p = 5$; Είναι οι προκύπτουσες μέθοδοι ευσταθείς;

4.14 Αποδείξτε ότι οι $k-$βηματικές μέθοδοι ανάδρομων διαφορών για $k = 1, 2, 3, 4$ είναι ευσταθείς. (Είναι γνωστό ότι οι μέθοδοι αυτές είναι ευσταθείς, αν και μόνον αν $1 \leq k \leq 6$.) [*Υπόδειξη*: Έστω ρ_k το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της $k-$βηματικής μεθόδου. Τότε, όπως αναφέραμε στην παράγραφο 4.1,

$$\rho_k(\zeta) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}\zeta^{k-i}(\zeta-1)^i.$$

Βεβαιωθείτε ότι

$$\rho_3(\zeta) = \frac{1}{6}(\zeta-1)r_2(\zeta), \quad \rho_4(\zeta) = \frac{1}{12}(\zeta-1)r_3(\zeta),$$

με $r_2(\zeta) = 11\zeta^2 - 7\zeta + 2$ και $r_3(\zeta) = 25\zeta^3 - 23\zeta^2 + 13\zeta - 3$. Προσδιορίστε τις ρίζες του r_2. Προφανώς $r_3(1) \neq 0$. Χρησιμοποιήστε είτε τη θεωρία του Schur είτε το κριτήριο των Routh–Hurwitz για να διαπιστώσετε ότι το r_3 είναι απλό πολυώνυμο von Neumann.]

4.15 Είναι η τριβηματική μέθοδος που περιγράφεται από τις σταθερές

$$\alpha_3 = 1,\ \alpha_2 = -\frac{11}{6},\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_0 = -\frac{1}{6},\ \beta_3 = \frac{1}{12},\ \beta_2 = \frac{1}{6},\ \beta_1 = -\frac{1}{2},\ \beta_0 = \frac{7}{12}$$

ευσταθής και γιατί;

4.16 Είναι η τριβηματική μέθοδος της Άσκησης 4.15 συνεπής και γιατί;

4.21 Θεωρούμε μια $k-$βηματική μέθοδο, που περιγράφεται από τις σταθερές $\alpha_k, \dots, \alpha_0$ και $\beta_k, \dots, \beta_0$. Αν η μέθοδος είναι ευσταθής και συνεπής, αποδείξτε ότι

$$\beta_k + \cdots + \beta_0 \neq 0.$$

4.22 Θεωρούμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, για το οποίο υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής και ικανοποιεί τη συνθήκη (2.49). Αποδείξτε ότι οι προσεγγίσεις με τη διβηματική μέθοδο ανάδρομων διαφορών, για δεδομένα y^0 και y^1, είναι καλά ορισμένες, για οποιοδήποτε βήμα h.

4.23 Προσδιορίστε τις τιμές της παραμέτρου α, για τις οποίες η τριβηματική μέθοδος

$$y^{n+3} - (\alpha+1)^2 y^{n+2} + \alpha(\alpha^2 + 2\alpha + 2)y^{n+1} - \alpha^2(\alpha+1)y^n = hf(t^{n+3}, y^{n+3})$$

είναι ευσταθής.

4.24 Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (4.15) με μια πολυβηματική μέθοδο τάξης p. Αν η λύση y αυτού του προβλήματος είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ p, αποδείξτε ότι το σφάλμα συνέπειας $L_h y$ μηδενίζεται. Ιδιαίτερα, αν οι αρχικές τιμές, που χρησιμοποιούμε στη μέθοδο, είναι ακριβείς, αποδείξτε ότι η μέθοδος ολοκληρώνει το πρόβλημα ακριβώς, δηλαδή δίνει ως προσεγγίσεις στους κόμβους τις ακριβείς τιμές. [Συγκρίνετε με το αντίστοιχο αποτέλεσμα για μεθόδους Runge–Kutta· βλ. την Άσκηση 3.45.]

4.29 (Συνδυασμός πεπλεγμένης και άμεσης μεθόδου του Euler.) Γράφουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών στη μορφή

$$(\star) \qquad \begin{cases} y' = f(t,y) + g(t,y), \quad a \le t \le b, \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

θεωρούμε δηλαδή μια διάσπαση του δεξιού μέλους της Δ.Ε. σε δύο μέρη. Με τους συνηθισμένους συμβολισμούς, θεωρούμε την εξής μέθοδο για το πρόβλημα $(\star)$

$$(\star\star) \qquad y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}) + hg(t^n, y^n), \quad n = 0, \dots, N-1,$$

όπου $y^0 := y_0$. Προφανώς, η μέθοδος $(\star\star)$ προκύπτει με συνδυασμό της πεπλεγμένης και της άμεσης μεθόδου του Euler, και ανάγεται σε αυτές, όταν $g = 0$ και $f = 0$, αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι η τάξη ακρίβειας της νέας μεθόδου είναι ένα, όση και η τάξη των μεθόδων από τις οποίες προκύπτει. Υποθέτουμε τώρα ότι η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz (2.49) και η g τη συνθήκη του Lipschitz (1.6) με σταθερά L. Αποδείξτε ευστάθεια, με σταθερά ανεξάρτητη της f, και σύγκλιση της μεθόδου.
[*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε τη Δ.Ε. για να πεισθείτε ότι

$$\begin{aligned} y(t^{n+1}) - y(t^n) &- hf\big(t^{n+1}, y(t^{n+1})\big) - hg\big(t^n, y(t^n)\big) \\ &= y(t^{n+1}) - y(t^n) - hy'(t^{n+1}) + h\big[G(t^{n+1}) - G(t^n)\big] \end{aligned}$$

με $G(t) := g\big(t, y(t)\big)$.]
[*Σχόλιο*: Σε ορισμένες περιπτώσεις, που οι συναρτήσεις f και g συμπεριφέρονται διαφορετικά, η μέθοδος $(\star\star)$ μπορεί να παρουσιάζει τα πλεονεκτήματα των μεθόδων από τις οποίες προκύπτει, χωρίς να κληρονομεί τα μειονεκτήματά τους. Φερ' ειπείν, αν χρησιμοποιήσουμε μόνο την άμεση μέθοδο του Euler, η σταθερά στην ευστάθεια (και στην εκτίμηση του σφάλματος) εξαρτάται αναγκαστικά και από την f. Αν εξ άλλου η f είναι, παραδείγματος χάριν, γραμμική, ο υπολογισμός της προσέγγισης y^{n+1} στην $(\star\star)$ είναι πολύ εύκολος, ενώ αν χρησιμοποιήσουμε μόνο την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler και η g είναι μη γραμμική, τότε απαιτείται η επίλυση μίας μη γραμμικής εξίσωσης σε κάθε βήμα.]

4.30 (Συνδυασμοί πεπλεγμένων και άμεσων πολυβηματικών μεθόδων.) Θεωρούμε δύο $k-$βηματικές μεθόδους, μία πεπλεγμένη και μία άμεση, που περιγράφονται από σταθερές $\alpha_0, \dots, \alpha_k$, $\beta_0, \dots, \beta_k$ και $\alpha_0, \dots, \alpha_k$, $\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}$, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι αυτές οι μέθοδοι έχουν την ίδια τάξη ακρίβειας p. Συνδυάζοντας τις δύο μεθόδους διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών της Άσκησης 4.29 με τη μέθοδο

$$(\star)\qquad \sum_{j=0}^{k} \alpha_j y^{n+j} = h\sum_{j=0}^{k} \beta_j f(t^{n+j}, y^{n+j}) + h\sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j g(t^{n+j}, y^{n+j}),$$

$n = 0, \dots, N-1$, με δεδομένες αρχικές προσεγγίσεις $y^0, \dots, y^{k-1}$. Αν η πεπλεγμένη μέθοδος έχει καλές ιδιότητες ευστάθειας, μέθοδοι της ανωτέρω μορφής παρουσιάζουν πλεονεκτήματα αντίστοιχα όσων αναφέρθηκαν στην Άσκηση 4.29. Αποδείξτε ότι η τάξη ακρίβειας της μεθόδου $(\star)$ είναι p.
[*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε τη Δ.Ε. για να βεβαιωθείτε ότι

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y(t^{n+j}) - h\sum_{j=0}^{k} \beta_j f\big(t^{n+j}, y(t^{n+j})\big) - h\sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j g\big(t^{n+j}, y(t^{n+j})\big)\\
&= \sum_{j=0}^{k} \big[\alpha_j y(t^{n+j}) - h\beta_j y'(t^{n+j})\big] + h\Big[\sum_{j=0}^{k} \beta_j G(t^{n+j}) - \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j G(t^{n+j})\Big],
\end{aligned}$$

με $G(t) := g\big(t, y(t)\big)$. Ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος είναι τάξης h^{p+1}, αφού η τάξη της πεπλεγμένης μεθόδου είναι p. Για να βεβαιωθείτε ότι και ο δεύτερος όρος είναι της ίδιας τάξης, αναπτύξτε κατά Taylor ως προς το σημείο t^n και χρησιμοποιήστε τις σχέσεις μεταξύ των συντελεστών β_j, α_j και γ_j, α_j, που καθορίζουν την τάξη ακρίβειας των αρχικών μεθόδων.]

4.31 (Συνδυασμοί πεπλεγμένων και άμεσων μεθόδων ανάδρομων διαφορών.) Έστω $k \in \mathbb{N}$, $\beta_0 = \cdots = \beta_{k-1} = 0, \beta_k = 1$, και α_j, $j = 0, \dots, k$, οι συντελεστές του ζ^j στο πολυώνυμο α,

$$\alpha(\zeta) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \zeta^{k-i} (\zeta - 1)^i.$$

Όπως αναφέραμε ήδη στην παράγραφο 4.1, αυτές οι σταθερές περιγράφουν την $k-$ βηματική μέθοδο ανάδρομων διαφορών. Θεωρούμε τώρα και το πολυώνυμο γ, $\gamma(\zeta) = \zeta^k - (\zeta - 1)^k$, βαθμού $k-1$, και συμβολίζουμε με γ_j, $j = 0, \dots, k-1$, τους συντελεστές του ζ^j αυτού του πολυωνύμου. Αποδείξτε ότι η τάξη ακρίβειας της άμεσης $k-$βηματικής μεθόδου που περιγράφεται από τις σταθερές $\alpha_0, \dots, \alpha_k$, $\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}$ είναι k. (Μπορεί να αποδειχθεί ότι για καμμία άλλη επιλογή σταθερών $\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}$ δεν επιτυγχάνουμε τάξη ακρίβειας μεγαλύτερη ή ίση του $k\cdot$ βλ. και την Άσκηση 4.26.)