3. Μέθοδοι των Runge–Kutta

Ασκήσεις

3.2 Αποδείξτε ότι η μέθοδος των Runge–Kutta που περιγράφεται από το μητρώο

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline 1 & \end{array}$$

έχει τάξη ακρίβειας ένα.

3.3 Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών (3.1) και υποθέστε ότι η f είναι αρκετά ομαλή στο $[a, b] \times \mathbb{R}$, και ότι η ίδια και κατάλληλες μερικές παράγωγοί της είναι φραγμένες. Προσδιορίστε όλες τις μεθόδους των Runge–Kutta της μορφής

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & \tau_2 \\ \hline b_1 & b_2 & \end{array},$$

οι οποίες έχουν τάξη ακρίβειας $p = 2$.

3.8 Αποδείξτε ότι η μόνη μέθοδος RK με ένα στάδιο και τάξη ακρίβειας δύο είναι η (πεπλεγμένη) μέθοδος του μέσου (Παράδειγμα υπ’ αριθμ. 3 στην παράγραφο 3.1).

3.12 Αποδείξτε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη συνέπεια μιας μεθόδου των Runge–Kutta (3.2), για το πρόβλημα (3.1), είναι $b_1 + b_2 + \cdots + b_q = 1$.

3.13 Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = 1, & 0 \le t \le 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Έστω $N \in \mathbb{N}, h := \frac{1}{N}$, και y^N η προσέγγιση της λύσης του προβλήματος αυτού στο σημείο 1, την οποία δίνει μια μέθοδος των Runge–Kutta όταν εφαρμοσθεί στο πρόβλημα με βήμα h. Αν υποθέσουμε ότι

$$y^N \to 1 = y(1), \quad N \to \infty,$$

αποδείξτε ότι η μέθοδος των Runge–Kutta είναι συνεπής.
[*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 3.12.]

3.14 Θεωρούμε τα $\zeta^{n,i}$ όπως ορίστηκαν στην (3.29). Αποδείξτε, για το πρόβλημα (3.1), υπό τις προϋποθέσεις της Άσκησης 3.3, ότι

$$\max_{n,i} \left| y(t^{n,i}) - \zeta^{n,i} \right| \le Ch$$

και

$$\max_{n} \left| y(t^{n,i}) - \zeta^{n,i} \right| \le Ch^2 \iff \sum_{j=1}^{q} a_{ij} = \tau_i, \quad i = 1, \dots, q.$$

3.15 Είναι η μέθοδος των Runge–Kutta που περιγράφεται από το μητρώο

$$\begin{array}{ccc|c}
\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\
\hline
\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} &
\end{array}$$

συνεπής και γιατί;

3.19 Έστω $a = t^0 < t^1 < \cdots < t^N = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$, $h_n := t^{n+1} - t^n$, $n = 0, \dots, N-1$, και $h := \max_{0 \le n \le N-1} h_n$. Αν η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \quad a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

είναι αρκετά ομαλή, τότε για το σφάλμα $\varepsilon^n := y(t^n) - y^n$, $n = 0, \dots, N$, μιας μεθόδου των Runge–Kutta τάξεως p ισχύει

$$|\varepsilon^{n+1}| \le (1 + C_1 h_n)|\varepsilon^n| + C_2 h_n^{p+1}, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

με σταθερές C_1, C_2 ανεξάρτητες του N και του διαμερισμού. Δεχόμενοι αυτό το γεγονός, αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά C, ανεξάρτητη του h, τέτοια ώστε

$$\max_{0 \le n \le N} |\varepsilon^n| \le Ch^p.$$

3.24 Θεωρήστε τις ημιπεπλεγμένες μεθόδους RK (3.11) με παράμετρο $\mu \in \mathbb{R}$. Για ποιες τιμές του μ είναι οι μέθοδοι $A-$ευσταθείς; Ποια είναι η τάξη ακρίβειάς τους p, που δίνει η (3.103);

3.25 Αποδείξτε ότι η μέθοδος (3.12) είναι $A-$ευσταθής. Αναπτύσσοντας την αντίστοιχη ρητή συνάρτηση r σε δυναμοσειρά του z, προσδιορίστε την τάξη ακρίβειας p που δίνει η (3.103) γι' αυτή τη μέθοδο.

3.30 α) Αποδείξτε ότι οι ημιπεπλεγμένες μέθοδοι (3.11) είναι $B-$ευσταθείς για $\mu \ge 1/4$.

β) Αποδείξτε ότι η μέθοδος των Gauss–Legendre με δύο στάδια (3.12) είναι $B-$ευσταθής, με $m_{ij} = 0$.
γ) Αποδείξτε ότι η μέθοδος που αντιστοιχεί στο μητρώο

$$\begin{array}{cc|c} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{4} \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

είναι $A-$ευσταθής, αλλά δεν ικανοποιεί τις συνθήκες αλγεβρικής ευστάθειας (3.122) . (Μπορεί να αποδειχθεί ότι δεν είναι $B-$ευσταθής.)

3.31 Χρησιμοποιήστε το Πόρισμα 3.1 για να αποδείξετε ότι η τάξη ακρίβειας της μεθόδου των Runge–Kutta–Radau με μητρώο

$$\begin{array}{cc|c} \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\ \hline \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \end{array}$$

είναι τρία.

3.40 Θεωρούμε μια μέθοδο των Runge–Kutta και την αντίστοιχη ρητή προσέγγιση r της εκθετικής συνάρτησης, $r(z) = 1 + zb^T(I - zA)^{-1}\boldsymbol{e}$, βλ. την (3.98). Αποδείξτε ότι η μέθοδος είναι συνεπής, αν και μόνο αν $r(0) = r'(0) = 1$, βλ. την Άσκηση 3.12.

3.41 Υποθέτουμε ότι μια μέθοδος των Runge–Kutta έχει τάξη ακρίβειας p. Αποδείξτε τότε ότι

$$b^T A^{\ell-1}\boldsymbol{e} = \frac{1}{\ell!}, \quad \ell = 1, \dots, p.$$

[*Υπόδειξη*: Με τους συμβολισμούς της προηγούμενης Άσκησης έχουμε

$$r(z) = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \big(b^T A^j \boldsymbol{e}\big) z^{j+1}.$$

Χρησιμοποιήστε την (3.103).]

3.47 Δώστε ένα παράδειγμα πεπλεγμένης μεθόδου RK με αντίστοιχη ρητή προσέγγιση r που δεν είναι στοιχείο του πίνακα Padé του εκθετικού.
[*Υπόδειξη*: Θεωρήστε τη μέθοδο (3.11) για κατάλληλα μ. (Η ρητή προσέγγιση r δόθηκε λίγο πριν την (3.104).)]