2. Η μέθοδος του Euler

Ασκήσεις

⋆2.5 Έστω $a = t^0 < t^1 < \cdots < t^N = b$ ένας διαμερισμός του $[a, b]$. Υποθέστε ότι ο διαμερισμός είναι *ημιομοιόμορφος*, ότι υπάρχει δηλαδή θετική σταθερά μ, ανεξάρτητη του N, τέτοια ώστε

$$\min_{0\le n\le N-1} h_n \ge \mu \max_{0\le n\le N-1} h_n,$$

όπου $h_n := t^{n+1} - t^n$, $n = 0, \dots, N-1$. Θέστε

$$h := \max_{0\le n\le N-1} h_n,$$

και διατυπώστε και αποδείξτε ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2.1 γι' αυτήν την περίπτωση.

⋆2.6 Έστω $a = t^0 < t^1 < \cdots < t^N = b$ ένας οποιοσδήποτε διαμερισμός του $[a, b]$, $h_n := t^{n+1} - t^n$, $n = 0, \dots, N-1$, και

$$h := \max_{0\le n\le N-1} h_n.$$

Διατυπώστε και αποδείξτε ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2.1 γι' αυτήν την περίπτωση.

[*Υπόδειξη*: Αποδείξτε κατ' αρχάς, όπως στη (2.7), ότι

$$|\varepsilon^{n+1}| \le (1 + h_n L)|\varepsilon^n| + \frac{Mh}{2} h_n, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα και την $\varepsilon^0 = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|\varepsilon^{n+1}| &\le \frac{Mh}{2}\big[h_n + (1+h_nL)h_{n-1} + (1+h_nL)(1+h_{n-1}L)h_{n-2} \\
&\qquad + \cdots + (1+h_nL)(1+h_{n-1}L)\cdots(1+h_1L)h_0\big] \\
&\le \frac{Mh}{2}\Big[h_n + \mathrm{e}^{L(t^{n+1}-t^n)}(t^n - t^{n-1}) + \mathrm{e}^{L(t^{n+1}-t^{n-1})}(t^{n-1} - t^{n-2}) \\
&\qquad + \cdots + \mathrm{e}^{L(t^{n+1}-t^1)}(t^1 - t^0)\Big] \\
&\le \frac{Mh}{2}\mathrm{e}^{L(b-a)}\big(h_n + h_{n-1} + \cdots + h_0\big) = \frac{Mh}{2}\mathrm{e}^{L(b-a)}(b-a).
\end{aligned}$$

Αποδείξτε και χρησιμοποιήστε και την ανισότητα

$$\mathrm{e}^{L(t^{n+1}-t^k)}(t^k - t^{k-1}) \le \int_{t^{k-1}}^{t^k} \mathrm{e}^{L(t^{n+1}-s)}\,ds$$

για να βελτιώσετε τη σταθερά στην προηγούμενη εκτίμηση.]

⋆2.7 Αποδείξτε το Θεώρημα 2.2.

[*Υπόδειξη*: Η εμφάνιση της σταθεράς C_1 στην εκτίμηση (2.22) οφείλεται στο γεγονός ότι η παράσταση του υπολοίπου του αναπτύγματος Taylor με την τιμή μιας κατάλληλης παραγώγου σε ένα ενδιάμεσο σημείο *δεν* ισχύει για διανυσματικές συναρτήσεις. Πράγματι, στη διανυσματική περίπτωση, η αντίστοιχη της σχέσης

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hy'(t^n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n),$$

της βαθμωτής περίπτωσης, είναι

$$y_i(t^{n+1}) = y_i(t^n) + hy_i'(t^n) + \frac{h^2}{2}y_i''(\xi_{ni}),$$

με $\xi_{ni} \in (t^n, t^{n+1})$. Συνεπώς, η αντίστοιχη της παράστασης (2.5) είναι στην προκειμένη περίπτωση

$$y_i(t^{n+1}) = y_i(t^n) + hf_i\big(t^n, y(t^n)\big) + \frac{h^2}{2}y_i''(\xi_{ni}).]$$

⋆2.8 Έστω ότι το πρόβλημα (1.1) έχει μοναδική λύση $y \in C^2[a,b]$, και έστω $m, \ell \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\forall t \in [a,b] \quad m \le y(t) \le \ell,$$

και $\delta > 0$. Αν αντί της (1.6) υποθέσουμε ότι ισχύει η συνθήκη του Lipschitz τοπικά, δηλαδή ότι

$$\exists L \ge 0 \;\; \forall t \in [a,b] \;\; \forall y_1, y_2 \in [m-\delta, \ell+\delta] \quad \big|f(t,y_1) - f(t,y_2)\big| \le L|y_1 - y_2|$$

(η οποία είναι μια πολύ χρήσιμη και ρεαλιστική συνθήκη), αποδείξτε ότι υπάρχει $h_0 > 0$ τέτοιο ώστε για $h \in (0, h_0]$ η μέθοδος του Euler για το πρόβλημα (1.1) με βήμα h (ομοιόμορφος διαμερισμός) να δίνει προσεγγίσεις για τις οποίες ισχύει η εκτίμηση (2.4).

[*Υπόδειξη*: Υποθέστε ότι

$$\frac{M}{2L}[\mathrm{e}^{L(b-a)} - 1]h_0 < \delta,$$

όπου

$$M := \max_{a \le t \le b} |y''(t)|,$$

και αποδείξτε επαγωγικά ότι $y^k \in [m-\delta, \ell+\delta], k = 0, \dots, N.$]

⋆2.9 Θεωρήστε το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών για ένα 2×2 σύστημα Σ.Δ.Ε. με αγνώστους $x(t), y(t), t \geq 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y, & t \geq 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, & t \geq 0, \\ x(0) = 1, & y(0) = 0. \end{cases}$$

α) Αποδείξτε ότι ισχύει ο *νόμος διατήρησης* $x^2(t) + y^2(t) = 1, t \geq 0$. Βλέπε και την Άσκηση 1.28.

β) Θεωρήστε τις προσεγγίσεις $(x^n, y^n), n \geq 0$, που παράγει η μέθοδος του Euler για το παραπάνω σύστημα για σταθερό $h > 0$. Αποδείξτε ότι $(x^n)^2 + (y^n)^2 \to \infty$, καθώς $n \to \infty$.

γ) Θεωρήστε τις προσεγγίσεις $(x^n, y^n), n \geq 0$, που παράγει η μέθοδος του τραπεζίου (2.57) γι' αυτό το σύστημα για σταθερό $h > 0$. Αποδείξτε ότι $(x^n)^2 + (y^n)^2 = 1$, για κάθε n, δηλαδή ότι η μέθοδος του τραπεζίου ικανοποιεί το διακριτό ανάλογο του συνεχούς νόμου διατήρησης του ερωτήματος α).

δ) Τι μπορούμε να πούμε για την ποσότητα $(x^n)^2 + (y^n)^2$ για τις προσεγγίσεις x^n, y^n που παράγει η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler;

⋆2.10 Θεωρούμε τα προβλήματα αρχικών τιμών της Άσκησης 1.8 και υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη που αναφέρθηκε εκεί, δηλαδή η (2.49). Έστω $N \in \mathbb{N}, h := (b-a)/N$ και $t^n := a + nh, n = 0, \dots, N$. Προσεγγίζουμε τις λύσεις των προβλημάτων αρχικών τιμών με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler, με βήμα h, και συμβολίζουμε με y^n και z^n τις αντίστοιχες προσεγγίσεις. Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \in \{0, \dots, N\}$, ισχύει

$$|y^n - z^n| \leq |y^0 - z^0|.$$

⋆2.11 Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t), & t \in [0,1], \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t), & t \in [0,1], \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler, χρησιμοποιώντας έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[0,1]$ με βήμα h. Αποδείξτε, με τους συνηθισμένους συμβολισμούς, ότι $(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 \le (x^n)^2 + (y^n)^2$. [Συγκρίνετε με την Άσκηση 1.26.]

***2.12** Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών της Άσκησης 1.26 με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler, με βήμα h. Συμβολίζουμε με y^n την προσέγγιση της $y(t^n), t^n = nh$. Αποδείξτε ότι $\|y^{n+1}\| \le \|y^n\|, n \in \mathbb{N}_0$. Στην προκειμένη περίπτωση η Ευκλείδεια νόρμα των προσεγγίσεων φθίνει, δηλαδή η μέθοδος μιμείται την αντίστοιχη ιδιότητα του συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Αποδείξτε επίσης ότι και η πεπλεγμένη μέθοδος του μέσου, βλ. την (3.8) στο επόμενο κεφάλαιο, (ή ισοδύναμα η μέθοδος του τραπεζίου) έχει την ίδια ιδιότητα. [*Υπόδειξη*: Στην περίπτωση της πεπλεγμένης μεθόδου του Euler πάρτε στο βήμα της αριθμητικής μεθόδου που μας δίνει το y^{n+1} συναρτήσει του y^n το εσωτερικό γινόμενο με y^{n+1}. Στην περίπτωση της μεθόδου του μέσου πάρτε το εσωτερικό γινόμενο με $y^{n+1} + y^n$.]

***2.13** Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών της Άσκησης 1.28 με τη μέθοδο του μέσου (ή ισοδύναμα με τη μέθοδο του τραπεζίου) με βήμα h. Αποδείξτε ότι οι προσεγγίσεις έχουν την ίδια Ευκλείδεια νόρμα, $\|y^n\| = \|y_0\|, n \ge 0$.

***2.14** Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών της Άσκησης 1.28 με τη μέθοδο του μέσου (ή με τη μέθοδο του τραπεζίου· στην προκειμένη περίπτωση οι δύο αυτές μέθοδοι συμπίπτουν), με βήμα h. Συμβολίζουμε με y^n την προσέγγιση της $y(t^n), t^n = nh$. Αποδείξτε ότι οι προσεγγίσεις έχουν την ίδια Ευκλείδεια νόρμα, $\|y^n\| = \|y_0\|$, δηλαδή ότι στην προκειμένη περίπτωση η μέθοδος μιμείται την αντίστοιχη ιδιότητα του συστήματος διαφορικών εξισώσεων.
[*Υπόδειξη*: Πάρτε στο βήμα της αριθμητικής μεθόδου που μας δίνει το y^{n+1} συναρτήσει του y^n το εσωτερικό με $y^{n+1} + y^n$ και χρησιμοποιήστε την υπόδειξη που δόθηκε στην Άσκηση 1.28.]

***2.15** Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = -\mathrm{e}^y, & t \in [0,1], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler, με βήμα h. Αποδείξτε ότι οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

***2.16** Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & t \ge 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler με βήμα h. Για $\lambda < 0$ (σημειώστε ότι σε αυτήν την περίπτωση ικανοποιείται η (2.49)) οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες, όπως διαπιστώνει κανείς αμέσως. Για $\lambda > 0$ οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες για h αρκετά μικρό, βλ. και τη σχετική συζήτηση μεταξύ των σχέσεων (2.49) και (2.56). Βεβαιωθείτε ότι στη δεύτερη περίπτωση, για $h = 1/\lambda$ οι προσεγγίσεις *δεν* είναι καλά ορισμένες, για να πεισθείτε ότι κάποια συνθήκη είναι απαραίτητη.

*2.17 Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (1.1) και υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τη (2.49). Διακριτοποιούμε το πρόβλημά μας με τη μέθοδο του μέσου, βλ. την (3.9) στο επόμενο κεφάλαιο, θεωρώντας έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[a,b]$. Αποδείξτε ότι οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.
[*Υπόδειξη*: Αποδείξτε ότι, δεδομένου του y^n, το $x^\star = \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})$ είναι καλά ορισμένο.]

*2.18 Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f'(x) \le 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x, $x \in \mathbb{R}$. Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(y(t)\big), & t \in [a,b], \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

με τη μέθοδο του τραπεζίου, θεωρώντας έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[a,b]$. Αποδείξτε ότι οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

*2.19 Έστω $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = -\big(y(t)\big)^3 + \varphi(t), & t \in [0,1], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

με τη μέθοδο του τραπεζίου, θεωρώντας έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[0,1]$ με βήμα h. Αποδείξτε ότι οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

*2.20 Προσδιορίστε την περιοχή απόλυτης ευστάθειας (στο μιγαδικό επίπεδο) της μεθόδου του τραπεζίου (2.57) και το διάστημα απόλυτης ευστάθειας της μεθόδου (2.58).

*2.21 (Απόλυτη ευστάθεια στον φανταστικό άξονα.) Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών για την $y : [0,\infty) \to \mathbb{C}$

$$\begin{cases} y' = \mathrm{i}\,\mu y, & t \ge 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

όπου μ πραγματική σταθερά, διάφορη του μηδενός. Προφανώς, το πρόβλημα έχει τη λύση $y(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t}$, για την οποία ισχύει $\big|y(t)\big| = 1$, για κάθε $t \ge 0$.
Γι' αυτό το πρόβλημα θεωρήστε

α) Τη μέθοδο του Euler.

β) Την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler.

γ) Τη μέθοδο του τραπεζίου (2.57).

Ποια από τις τρεις αυτές μεθόδους θα επιλέγατε για την αριθμητική επίλυση του παραπάνω προβλήματος και γιατί;

⋆2.32 (Διακριτή ανισότητα του Gronwall, αντίστοιχη της διαφορικής μορφής: ομοιόμορφος διαμερισμός.) Έστω $T > 0, N \in \mathbb{N}$ και $h := \frac{T}{N}$. Αν $\alpha_0, \dots, \alpha_N$ και $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{N-1}$ μη αρνητικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε με $\gamma > 0$

$$\alpha_{n+1} \le (1 + \gamma h)\alpha_n + h\varepsilon_n, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

αποδείξτε ότι

$$\max_{1\le n\le N} \alpha_n \le \mathrm{e}^{\gamma T}\alpha_0 + \frac{1}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma T} \max_{0\le n\le N-1} \varepsilon_n.$$

⋆2.33 (Διακριτή ανισότητα του Gronwall, αντίστοιχη της διαφορικής μορφής: μη ομοιόμορφος διαμερισμός.) Έστω $T > 0, 0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$ ένας διαμερισμός του $[0, T], h_n := t^{n+1} - t^n, n = 0, \dots, N-1$. Αν $\alpha_0, \dots, \alpha_N$ και $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{N-1}$ μη αρνητικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε με $\gamma > 0$

$$\alpha_{n+1} \le (1 + \gamma h_n)\alpha_n + h_n\varepsilon_n, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

αποδείξτε ότι

$$\max_{1\le n\le N} \alpha_n \le \mathrm{e}^{\gamma T}\alpha_0 + \int_0^T \mathrm{e}^{\gamma(T-s)}\,ds \max_{0\le n\le N-1} \varepsilon_n,$$

βλ. την Άσκηση 2.6.

⋆2.34 (Διακριτή ανισότητα του Gronwall, αντίστοιχη της ολοκληρωτικής μορφής.) Έστω $T > 0, N \in \mathbb{N}$ και $h := \frac{T}{N}$. Αν $\alpha_0, \dots, \alpha_N$ και E μη αρνητικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε με $\gamma > 0$ να ισχύει

$$\alpha_{n+1} \le E + \gamma h \sum_{\ell=0}^{n} \alpha_\ell, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

αποδείξτε ότι

$$\max_{1\le n\le N} \alpha_n \le C(h\alpha_0 + E)$$

με μια σταθερά C ανεξάρτητη του h.

[*Υπόδειξη*: Έστω $\varphi_n := \gamma h \sum_{\ell=0}^{n} \alpha_\ell$. Τότε $\varphi_{n+1} - \varphi_n = \gamma h \alpha_{n+1}$, συνεπώς

$$\varphi_{n+1} \le \gamma h E + (1 + \gamma h)\varphi_n, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 2.32 για να εκτιμήσετε τα φ_n, και την

$$\alpha_{n+1} \le E + \varphi_n$$

για να εκτιμήσετε τα α_n.]

***2.35** (Η μέθοδος "θήτα".) Έστω $\vartheta \in [0,1]$. Με τους συνηθισμένους συμβολισμούς, θεωρούμε τη μέθοδο θήτα για το πρόβλημα (1.1),

$$y^{n+1} = y^n + (1-\vartheta)hf(t^n, y^n) + \vartheta hf(t^{n+1}, y^{n+1}), \quad n = 0, \ldots, N-1,$$

με $y^0 = y_0$. Ποιες γνωστές μέθοδοι προκύπτουν στις περιπτώσεις $\vartheta = 0, \vartheta = 1/2$ και $\vartheta = 1$; Αποδείξτε ότι η τάξη ακρίβειας της μεθόδου είναι ένα για $\vartheta \neq 1/2$ και δύο για $\vartheta = 1/2$. Αποδείξτε ότι για $\vartheta \geq 1/2$ η μέθοδος είναι $A-$ευσταθής.