ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

15/12/2011

Πολυβηματικές μέθοδοι

Εισήχθησαν πριν από ≈ 130 χρόνια
Θεωρία: 1950 (Dahlquist)

Συμβολισμοί και παραδείγματα

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$y : [a,b] \to \mathbb{R}^m$$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n := a + nh$, $n = 0, \dots, N$

Ζητούνται προσεγγίσεις: $y^n \approx y(t^n)$

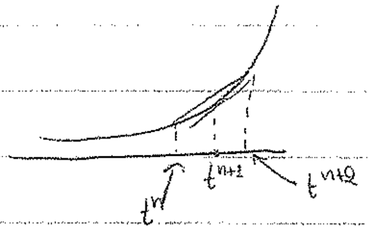
Παράδειγμα

$$\begin{cases} y^0, y^1 \text{ δεδομένα} \\ y^{n+2} - y^n = 2hf(t^{n+1}, y^{n+1}), \quad n = 0, \dots, N-2 \end{cases}$$

Διβηματική μέθοδος
Άμεση
τάξη $= 2$

1ος τρόπος: $y'(t^{n+1}) = f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$

$$y'(t^{n+1}) \approx \frac{y(t^{n+2}) - y(t^n)}{2h}$$



$$\frac{y(t^{n+2})-y(t^n)}{2h} \approx f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

$$\frac{y^{n+2}-y^n}{2h} = f(t^{n+1}, y^{n+1})$$

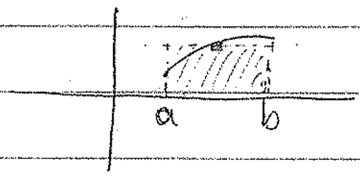
<u>2ος τρόπος:</u>

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+2}} y'(t)\,dt}_{y(t^{n+2})-y(t^n)} = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(t, y(t))\,dt$$

$$y(t^{n+2}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(t, y(t))\,dt$$

$$\underset{\uparrow}{\approx} 2h f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

μέθοδος του μέσου

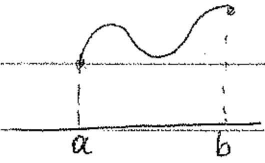


$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \approx (b-a)\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$y(t^{n+2}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(t, y(t))\,dt$$

$$\approx \frac{h}{3}\left[f(t^n, y(t^n)) + 4f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) + f(t^{n+2}, y(t^{n+2}))\right]$$

↖ Simpson



$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[\varphi(a)+4\varphi(\right.$$
$+\varphi$

$$\begin{cases} y^0, y^1 \text{ δεδομένα} \\ y^{n+2}-y^n = \frac{h}{3}\left[f(t^n, y^n) + 4f(t^{n+1}, y^{n+1}) + f(t^{n+2}, y^{n+2}\right], \quad n=0,\dots,N-2 \end{cases}$$

μέθοδος του Simpson

πεπλεγμένη ; $p=4$

Γενική μέθοδος:

$k\in\mathbb{N}$, $\left.\begin{matrix}\alpha_k, \dots, \alpha_0 \\ b_k, \dots, b_0\end{matrix}\right\}$ $2k+2$ αριθμοί

k-βηματική μέθοδος:

$$\begin{cases} y^0, y^1, \dots, y^{k-1} & \text{δεδομένα} \\ \alpha_k y^{n+k} + \dots + \alpha_0 y^n = h(b_k f^{n+k} + \dots + b_0 f^n), & n=0,\dots,N-k \end{cases}$$

Υπόθεση: $\alpha_k = 1$, $|\alpha_0| + |b_0| > 0$

1η Περίπτωση: $b_k = 0$ άμεση μέθοδος

2η Περίπτωση: $b_k \neq 0$ πεπλεγμένη μέθοδος

Κόστος: Άμεση μέθοδος: Ένας υπολογισμός της f ανά βήμα

Πεπλεγμένη μέθοδος: $(\alpha_k = 1)$

$$y^{n+k} = h b_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \underset{\nwarrow\,\text{δεδομένο}}{g^n}$$

Απαιτείται η επίλυση ενός $m\times m$ συστήματος

(Στις μεθόδους RK το αντίστοιχο σύστημα είναι $(qm)\times(qm)$)

$$\phi(x) = h b_k f(t^{n+k}, x) + g^n$$

συστολή για $h|b_k|L<1$

$\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

συστολή: $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $|\phi(x_1)-\phi(x_2)| \le \overset{0<L<1}{L}|x_1-x_2|$

$$\phi(x_1)-\phi(x_2) = h b_k f(t^{n+1}, x_1) - h b_k f(t^{n+1}, x_2)$$

$$\Rightarrow |\phi(x_1)-\phi(x_2)| = h|b_k|\,\underbrace{|f(t^{n+1}, x_1) - f(t^{n+1}, x_2)|}_{\le L|x_1-x_2|}$$

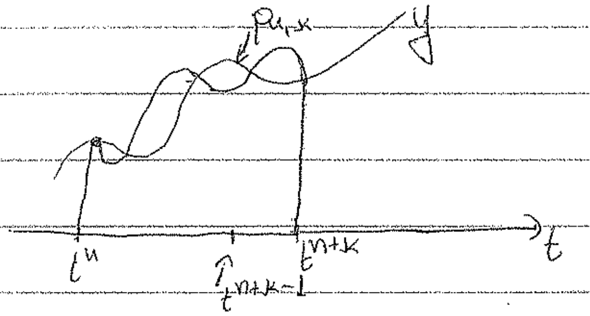
$$\le h|b_k|L\,|x_1-x_2|$$

• Μέθοδοι ανάδρομων διαφορών

$\kappa \in \mathbb{N}$ ($\kappa = 1 \longrightarrow$ πεπλεγμένη Euler)

Έστω $p_{n,\kappa} \in \mathbb{P}_\kappa$ τω

$p_{n,\kappa}(t^{n+i}) = y(t^{n+i})$, $i = 0, \dots, \kappa$



Θεωρούμε την $y'(t^{n+\kappa}) = f(t^{n+\kappa}, y(t^{n+\kappa}))$ και προσεγγίζουμε την $y'(t^{n+\kappa})$ με $p'_{n,\kappa}(t^{n+\kappa})$

Έχουμε $\boxed{p'_{n,\kappa}(t^{n+\kappa}) \simeq f(t^{n+\kappa}, y(t^{n+\kappa}))}$

Αντικαθιστώντας σε αυτή τη σχέση τις $y(t^n), \dots, y(t^{n+\kappa})$ με $y^n, \dots, y^{n+\kappa}$ και $\approx$ με $=$ οδηγούμαστε στην κ-βηματική μέθοδο ανάδρομων διαφορών:

$y^0, y^1, \dots, y^{\kappa-1}$ δεδομένα

$$\sum_{j=1}^{\kappa} \frac{1}{j} \nabla^j y^{n+\kappa} = h f^{n+\kappa}, \quad n = 0, \dots, N-\kappa$$

$$\nabla^1 y^m = y^m - y^{m-1}$$
$$\nabla^j y^m = \nabla^1(\nabla^{j-1} y^m)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 y^n &= \nabla^1(\nabla^1 y^n) = \nabla^1(y^n - y^{n-1}) \\ &= \nabla^1 y^n - \nabla^1 y^{n-1} \\ &= (y^n - y^{n-1}) - (y^{n-1} - y^{n-2}) \\ &= y^n - 2y^{n-1} + y^{n-2} \end{aligned}$$

$k=1$: $\alpha_1=1$, $\alpha_0=-1$, $b_1=1$ (πεπλεγμένη Euler)

$k=2$: $\alpha_2=1$, $\alpha_1=-\frac{4}{3}$, $\alpha_0=\frac{1}{3}$, $b_2=\frac{2}{3}$

$k=3$: $\alpha_3=1$, $\alpha_2=-\frac{18}{11}$, $\alpha_1=\frac{9}{11}$, $\alpha_0=-\frac{2}{11}$, $b_3=\frac{6}{11}$

$$b_k=1, \quad (b_0=b_1=\dots=b_{k-1}=0)$$

$$\alpha(\zeta)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\zeta^{k-1}(\zeta-1)^i=\alpha_0+\alpha_1\zeta+\alpha_2\zeta^2+\dots+\alpha_k\zeta^k$$

20/12/2011

Πολυβηματικές μέθοδοι

$$f^m := f(t^m, y^m)$$

$k\in\mathbb{N}$, $\alpha_k,\dots,\alpha_0$, $b_k,\dots,b_0 \in\mathbb{R}$

$(\alpha_k=1, \ |\alpha_0|+|b_0|>0)$

$$\begin{cases} y^0,\dots,y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ \alpha_k y^{n+k}+\dots+\alpha_0 y^n = h(b_k f^{n+k}+\dots+b_0 f^n), \ n=0,\dots,N-k \end{cases}$$

Παραδείγματα:

- Οι μέθοδοι του Adams είναι της μορφής $y^{n+k}-y^{n+k-1}=h\sum_{j=0}^{k} b_j f^{n+j}$, $n=0,\dots$

$b_k=0$: μέθοδοι των Adams - Bashforth

$b_k\neq 0$: -"- -"- - Moulton

Παραδείγματα:

$k=2$: $y^{n+2}-y^{n+1}=h(\frac{3}{2}f^{n+1}-\frac{1}{2}f^n)$

$k=3$: $y^{n+3}-y^{n+2}=h(\frac{23}{12}f^{n+2}-\frac{4}{3}f^{n+1}+\frac{5}{12}f^n)$

(άμεσες)

$k=2$: $y^{n+2} - y^{n+1} = h\left(\frac{5}{12} f^{n+2} + \frac{2}{3} f^{n+1} - \frac{1}{12} f^{n}\right)$

$\vdots$

• $y^{n+k} - y^{n+k-2} = h \sum_{j=0}^{k} b_j f^{n+j}$,

$b_k = 0$: μέθοδοι του Nyström

$b_k \neq 0$: -״- των Milne-Simpson

Γραμμικές εξισώσεις διαφορών

$k \in \mathbb{N}$, $a_k, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_k a_0 \neq 0$

Ομογενής, γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$(*) \quad a_k y^{n+k} + a_{k-1} y^{n+k-1} + \dots + a_0 y^n = 0, \qquad n = 0, \dots,$$

Κάθε ακολουθία $(y^n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ που ικανοποιεί την (*) για κάθε n λέγεται λύση της (*).

• Αν $(y_1^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ και $(y_2^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ λύσεις της (*) και $a, b \in \mathbb{C}$, τότε και η $(a y_1^n + b y_2^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ είναι λύση της (*).

Δηλαδή ο χώρος λύσεων της (*) είναι γραμμικός.

• Ποια είναι η διάστασή του;

Γραμμική ανεξαρτησία: Έστω (y_j^n), $j = 0, \dots, m$, λύσεις της (*). Λέμε ότι αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αν

$$c_0 y_0^n + \dots + c_m y_m^n = 0 \Rightarrow c_0 = c_1 = \dots = c_m = 0$$

Για δεδομένα $y^0, \dots, y^{k-1}$ η (*) έχει ακριβώς μία λύση

Ειδικές λύσεις της (*):

$1, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-1 \text{ μηδενικά}}, \dots$ $\qquad y_0^n$

$0, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-2 \text{ μηδενικά}}, \dots$ $\qquad y_1^n$

$\vdots$

$\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1 \text{ μηδενικά}}, 1$ $\qquad y_{k-1}^n$

Αυτές οι λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Έστω $(y^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ λύση της (*).

Ισχυρισμός:

(**) $y^n = y^0 \cdot y_0^n + y^1 \cdot y_1^n + \dots + y^{k-1} \cdot y_{k-1}^n$, $n\in\mathbb{N}_0$

- Και στα δύο μέλη της (**) έχουμε λύσεις της (*)
- Οι πρώτοι k όροι των δύο αυτών ακολουθιών συμπίπτουν, άρα οι ακολουθίες συμπίπτουν.

Συμπέρασμα: Διάσταση του χώρου λύσεων της (*) = k

Πιο χρήσιμη για τη συνέχεια βάση του χώρου λύσεων της (*):

Έστω $z\in\mathbb{C}$, $z\neq 0$. Ζητούμε να βρούμε λύσεις $(y^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ της (*)

της μορφής $\overset{\text{δείκτης}}{y^{n}} = z^{n} \leftarrow$ εκθέτης, $n \in \mathbb{N}_0$

Θα είχαμε:

$$a_k z^{n+k} + a_{k-1} z^{n+k-1} + \dots + a_0 z^{n} = 0 \iff$$

$$\underset{\neq 0}{\boxed{z^{n}}}(a_k z^{k} + \dots + a_0) = 0 \iff a_k z^{k} + \dots + a_0 = 0.$$

Ορίζουμε το πολυώνυμο p,

$$p(\zeta) = a_k \zeta^{k} + a_{k-1} \zeta^{k-1} + \dots + a_0$$

Συμπέρασμα: $y^{n} = z^{n}$ είναι λύση της (*), αν και μόνο αν το z είναι ρίζα του p. (Όλες οι ρίζες του p είναι διαφορετικές του μηδενός, αφού $a_0 \neq 0$)

1η Περίπτωση: Οι ρίζες $z_1, \dots, z_k$ του p είναι απλές. Τότε οι ακολουθίες $y_i^{n} := (z_i)^{n}$, $n = 0, \dots,$ με $i = 1, \dots, k$, είναι λύσεις της (*) και είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

$$\begin{array}{l|l} 1, z_1, z_1^{2}, \dots, z_1^{k-1}, & \dots \\ 1, z_2, z_2^{2}, \dots, z_2^{k-1}, & \dots \\ \vdots & \\ 1, z_k, z_k^{2}, \dots z_k^{k-1}, & \dots \end{array}$$

2η Περίπτωση: Το p έχει πολλαπλές ρίζες.

Έστω $z(\neq 0)$ ρίζα του p πολλαπλότητας ν.

Ισχυρισμός: Οι ακολουθίες $(y_j^{n})_{n \in \mathbb{N}_0}$, $j = 1, \dots, \nu$,

$$\begin{cases} y_1^{n} := z^{n} \\ y_2^{n} := n z^{n} \\ \vdots \\ y_\nu^{n} := n(n-1)\dots(n-\nu+2) z^{n} \end{cases}$$

με $n \in \mathbb{N}_0$, είναι λύσεις της (*).

$$p(\xi) = a_k \xi^k + a_{k-1} \xi^{k-1} + \cdots + a_0$$

~~$p(\xi)$~~ $p(z)=0$

$p'(z)=0 \Leftrightarrow k a_k z^{k-1} + a_{k-1}(k-1) z^{k-2} + \cdots + a_1 = 0$

Πολλαπλασιάζω επί z^{n+1} και παίρνω:

$$k a_k z^{n+k} + a_{k-1}(k-1) z^{n+k-1} + \cdots + a_1 z^{n+1} = 0$$

Το z είναι και ρίζα της παραγώγου του πολυωνύμου

$\underline{r_n(x) := x^n p(x)}$

$$r_n(z) = z^n \underbrace{p(z)}_{0} = 0$$

$$(r_n(z))' = n z^{n-1} \underbrace{p(z)}_{0} + z^n \underbrace{p'(z)}_{0} = 0$$

$r_n(z) = z^n (a_k z^k + \cdots + a_0)$

$r_n'(z) = 0 \Leftrightarrow (n+k) a_k z^{n+k-1} + \cdots + a_1 n z^{n-1} = 0$

Πολλαπλασιάζω επί z και παίρνω

$$a_k (n+k) z^{n+k} + \cdots + a_1 n z^n = 0$$

Αν $z_1, \ldots, z_m$ ρίζες του p πολλαπλότητας $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$, τότε με τον τρόπο που αναφέραμε κατασκευάζαμε ρ_1 λύσεις της (*) από τη z_1,

ρ_2 —"— —"— —"— z_2, ...

Συνολικά έχουμε πάλι k λύσεις της (*), που αποδεικνύεται ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Κάθε βάση του χώρου λύσεων της (*) λέγεται <u>θεμελιώδες σύστημα</u> της (*).

Ευστάθεια πολυβηματικών μεθόδων

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Υπόθεση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y.

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

$$(*) \begin{cases} y^0, \dots, y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ a_k y^{n+k} + \dots + a_0 y^n = h\left[b_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \dots + b_0 f(t^n, y^n)\right], \quad n = 0, \dots, N-k \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^0, \dots, z^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ a_k z^{n+k} + \dots + a_0 z^n = h\left[b_k f(t^{n+k}, z^{n+k}) + \dots + b_0 f(t^n, z^n)\right], \quad n = 0, \dots, N-k \end{cases}$$

Ορισμός: Η μέθοδος λέγεται ευσταθής, αν υπάρχει σταθερά C (ανεξάρτητη του h) τ.ω. για όλες τις ακολουθίες που ικανοποιούν τις $(*)$ και $(**)$ να ισχύει:

$$\max_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le C \max_{0 \le j \le k-1} |y^j - z^j|$$

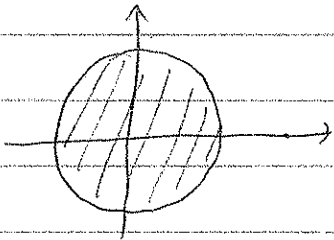
• Πότε είναι μια πολυβηματική μέθοδος ευσταθής;

Ορισμός: (Συνθήκη των ριζών)

$$\begin{cases} \rho(\zeta) = a_k \zeta^k + a_{k-1}\zeta^{k-1} + \dots + a_0 \\ \text{χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μεθόδου} \end{cases}$$

Λέμε ότι η πολυβηματική μέθοδος $(*)$ ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών, αν για το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο ισχύει:

$$\rho(z) = 0 \Rightarrow |z| \le 1,$$
$$\rho(z) = \rho'(z) = 0 \Rightarrow |z| < 1$$



Δηλαδή: όλες οι ρίζες του ρ βρίσκονται στο μοναδιαίο κύκλο, και οι πολλαπλές βρίσκονται στο εσωτερικό του.

Θα αποδείξουμε ότι: Μια πολυβηματική μέθοδος είναι ευσταθής, αν και μόνο αν ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών.

Πρακτικό ερώτημα: Πώς ελέγχουμε τη συνθήκη των ριζών; Μπορεί να γίνει χωρίς να βρούμε τις ρίζες. Υπάρχουν δύο κριτήρια, το κριτήριο του Schur και το κριτήριο των Routh-Hurwitz.

22/12/2011

Ευστάθεια:

$$(*)\begin{cases} y^0, \dots, y^{k-1} \quad \text{δεδομένα} \\ \alpha_k y^{n+k} + \dots + \alpha_0 y^n = h\left[\beta_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \dots + \beta_0 f(t^n, y^n)\right], \\ \qquad n = 0, \dots, N-\cancel{k} \end{cases}$$

$$z^0, \dots, z^{k-1} \quad \text{δεδομένα}$$

$$\alpha_k z^{n+k} + \dots + \alpha_0 z^n = h\left[\beta_k f(t^{n+k}, z^{n+k}) + \dots + \beta_0 f(t^n, z^n)\right],$$

Συνθήκη των ριζών:

$$\rho(\zeta) = \alpha_k \zeta^k + \alpha_{k-1}\zeta^{k-1} + \dots + \alpha_0$$

$$\begin{cases} \rho(\zeta) = 0 \Rightarrow |z| \le 1 \\ \rho(z) = \rho'(z) = 0 \Rightarrow |z| < 1 \end{cases}$$

Ζητούμε να ισχύει

$$(**) \max_{0\le n\le N} |y^n - z^n| \le C \max_{0\le j\le k-1} |y^j - z^j|$$

με C ανεξ. του h.

Ισχύει: Η μέθοδος είναι ευσταθής αν και μόνο αν ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών
(Η ευστάθεια ή μη εξαρτάται μόνο από τα α_i, όχι από τα β_i!)

1ος Ισχυρισμός: Από την ευστάθεια έπεται η συνθήκη των ριζών. (δηλ. η συνθήκη των ριζών είναι αναγκαία για να έχουμε ευστάθεια)

Απόδειξη:

(Επειδή στη συνθήκη των ριζών δεν υπεισέρχονται τα β_i, επιλέγουμε $f=0$) Τότε έχουμε

$$(1)\begin{cases} y^0,\dots,y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ \alpha_k y^{n+k}+\dots+\alpha_0 y^n=0, \quad n=0,\dots,N-k, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^0,\dots,z^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ \alpha_k z^{n+k}+\dots+\alpha_0 z^n=0, \quad n=0,\dots,N-k \end{cases}$$

Χ.π.τ.γ. επιλέγουμε τα $z^m=0$, $m=0,\dots,N$

Η σχέση $(\ast\ast)$ δίνει τότε

$$(\ast)\ \boxed{\max_{0\le n\le N}|y^n| \le C\max_{0\le j\le k-1}|y^j|}$$

Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι από την $(\ast)$ έπεται η συνθήκη των ριζών.

1) Έστω z ρίζα του ρ. Επιλέγουμε ως λύση της (1) την

$$y^{n\,\leftarrow\text{δείκτης}} := z^{n\,\leftarrow\text{εκθέτης}}, \quad n=0,\dots,N$$

Τότε η $(\ast)$ δίνει

$$(2)\ \max_{0\le n\le N}(|z|^n) \le C\max_{0\le j\le k-1}(|z|^j)$$

Αν $|z|>1$, τότε $|z|^n \longrightarrow \infty$, οπότε η (2) δεν ικανοποιείται

2) Έστω z πολλαπλή ρίζα του ρ. Επιλέγουμε τότε την (1) $y^n := n z^n$ και η (+) δίνει ότι
$$\max_{0\le n\le N} (n|z|^n) \le C \max_{0\le j\le k-1} (j|z|^j)$$

Ξέρουμε ότι $|z| \le 1$ ~~Αν~~

Αν $|z|=1$, τότε η προηγούμενη σχέση δίνει
$N \le C(k-1)$, άτοπο

Πρόταση: (Χρήσιμο αποτέλεσμα για την ευστάθεια και για την εκτίμηση σφάλματος πολ. μεθόδων)

Έστω μια κ-βηματική μέθοδος (*) που ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών. Έστω λ^n, $n=0,\dots,N-k$, δεδομένοι αριθμοί, και έστω b_i^n $i=0,\dots,k$, $n=0,\dots,N-k$, δεδομένοι αριθμοί τ.ω. $|b_i^n| < B < \infty$. Για $h = \frac{b-a}{N}$ θεωρούμε την εξίσωση διαφορών
$$a_k\psi^{n+k}+\dots+a_0\psi^n = h(b_k^n\psi^{n+k}+\dots+b_0^n\psi^n)+\lambda^n, \quad n=0,\dots,N-k$$
Τότε υπάρχει $h_0>0$ τ.ω. για $h\le h_0$ να ισχύει
$$\max_{0\le n\le N}|\psi^n| \le C\left[\max_{0\le j\le k-1}|\psi^j| + N\max_{0\le n\le N-k}|\lambda^n|\right]$$

με C ανεξ. των h, λ^n, ψ^n, N και b_i^n
(που εξαρτάται από τα B, $b-a$ και h_0).

- Dahquist
- Butcher $((y^n,\dots,y^{n+k-1}) \to (y^{n+1},\dots,y^{n+k})$

Ισχυρισμός: Αν μια μέθοδος πληροί τη συνθήκη των ριζών, τότε είναι ευσταθής

Απόδειξη:

Θέτουμε $\psi^n := y^n - z^n$ και έχουμε
$$a_k\psi^{n+k}+\dots+a_0\psi^n = h\{b_k[f(t^{n+k},y^{n+k}) - f(t^{n+k},z^{n+k})] + \dots + b_0[f(t^n,y^n)-f(t^n,z^n)]\}$$

$$f(t^m, y^m) - f(t^n, z^n) = \frac{f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)}{\underset{\neq 0}{\boxed{y^n - z^n}}} \underbrace{(y^n - z^n)}_{\varphi^n}$$

Ορίζουμε: ~~$g^m :=$~~

$$g^m := \begin{cases} \dfrac{f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)}{y^n - z^n}, & \text{όταν } y^n \neq z^n, \\ 0, & \text{όταν } y^n = z^n. \end{cases}$$

Τότε η σχέση μας γράφεται στη μορφή

$$a_k \varphi^{n+k} + \dots + a_0 \varphi^n = h \{ \underset{b_k^n}{\boxed{b_k g^{n+k}}} \varphi^{n+k} + \dots + \overset{b_0^n}{\boxed{b_0 g^n}} \varphi^n \}, \quad n = 0, \dots, N-k$$

Με $b_i^n := b_i g^{n+i}$ έχουμε

$$a_k \varphi^{n+k} + \dots + a_0 \varphi^n = h (b_k^n \varphi^{n+k} + \dots + b_0^n \varphi^n), \quad n = 0, \dots, N-k.$$

$$b_i^n = |b_i| \cdot \underbrace{|g^{n+i}|}_{\leq L} \leq L \cdot |b_i| \leq L \max_{0 \leq j \leq k} |b_j| =: B$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη Πρόταση (με $\delta^n = 0$) ισχύει

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leq C \max_{0 \leq j \leq k-1} |y^j - z^j|$$

10/01/2012

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

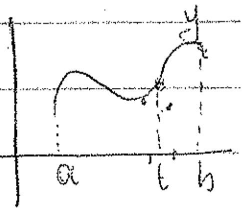
$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n := a + nh$, $n = 0, \dots, N$

$$(*) \begin{cases} y^0, \dots, y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ a_k y^{n+k} + \dots + a_0 y^n = h [b_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \dots + b_0 f(t^n, y^n)] \end{cases}$$

$n = 0, \dots, N-k$

- Ευστάθεια ✓
- Συνέπεια (τάξη του τοπικού σφάλματος)
- Εκτίμηση σφάλματος

Ορισμός (Σύγκλιση πολυβηματικής μεθόδου)



$N \to \infty$ $(h \to 0)$

Υπόθεση: $\lim_{h \to 0} y^j = y_0$, $j = 0, \dots, k-1$.

Ζητάμε: $a + nh \to t$ καθώς $h \to 0$ και $n \to \infty$

Θέλαμε η $y_h^n \to y(t)$

Έστω $y_h^0, \dots, y_h^{k-1}$ τ.ω.

$\lim_{h \to 0} y_h^j = y_0$, $j = 0, \dots, k-1$

Έστω y^n η προσέγγιση στο σημείο $t^n = a + nh$ που μας δίνει η k-βηματική μέθοδος $(*)$.
Λέμε ότι η μέθοδος είναι συγκλίνουσα, αν, για κάθε $t \in [a, b]$ ισχύει

$$\lim y^n = y(t),$$

όταν $n \to \infty$, $h \to 0$ έτσι ώστε $t^n = a + nh \to t$
Αυτό ζητάμε να ισχύει για όλα τα προβλήματα αρχικών τιμών όταν η f είναι συνεχής και ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y.

Πρόταση: (Η σύγκλιση συνεπάγεται ευστάθεια)

Κάθε συγκλίνουσα πολυβηματική μέθοδος είναι ευσταθής.

Τάξη ακρίβειας, συνέπεια και σύγκλιση πολυβηματικών μεθόδων.

| Εκτίμηση σφάλμ.

- Έστω ότι η y είναι αρκετά ομαλή.

Για $t \in [a, b-kh]$ ορίζουμε

$$(L_h y)(t) := \sum_{j=0}^{k} [a_j y(t+jh) - h b_j y'(t+jh)]$$

$a \quad t+h \cdots t+kh \quad b$

$t+kh \le b \Leftrightarrow t \le b-kh$

$$\sum_{j=0}^{k} a_j y(t^{n+j}) - h \sum_{j=0}^{k} b_j f(\underbrace{t^{n+j}, y(t^{n+j})}_{y'(t^{n+j})}) =$$

σφάλμα συνέπειας (μέτρο της αποτυχίας της ακριβούς λύσης να ικανοποιεί τη μέθοδο)

$$= \sum_{j=0}^{k} a_j y(t^n+jh) - h \sum_{j=0}^{k} b_j y'(t^n+jh)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} [a_j y(t^n+jh) - h b_j \, y'(t^n+jh)]$$

Τα πράγματα είναι απλά γιατί στο $L_h y$ δεν υπεισέρχεται η f!

Ορισμός (Τάξη ακρίβειας πολυβηματικής μεθόδου)

Έστω $y:[a,b] \to \mathbb{R}$ τυχαία, αρκετά ομαλή συνάρτηση.

Αν p είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος, για τον οποίο ισχύει

$$\exists\, C = C(y) \quad \forall t \in [a, b-kh] \quad |(L_h y)(t)| \le C h^{p+1}$$

τότε λέμε ότι η τάξη ακρίβειας της μεθόδου είναι p.

Πώς βρίσκαμε το p;

Αναπτύσσουμε τις $y(t+jh)$ και $y'(t+jh)$ ως προς το σημείο t και παίρνουμε

$$(L_h y)(t) = C_0 y(t) + C_1 h y'(t) + C_2 h^2 y''(t) + \cdots$$

Η μέθοδος έχει τάξη p, αν και μόνο αν

$$C_0 = C_1 = \cdots = C_p = 0 \quad \text{και} \quad C_{p+1} \neq 0$$

Οι σταθερές $C_0, C_1, \ldots$ δίνονται από τους τύπους (η απόδειξη στις Ασκήσεις)

$$\begin{cases} C_0 = a_0 + a_1 + \cdots + a_k \\ C_1 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + k a_k - (b_0 + b_1 + \cdots + b_k) \end{cases}$$

και, για $j \geq 2$,

$$C_j = \frac{1}{j!}\left(a_1 + 2^j a_2 + 3^j a_3 + \cdots + k^j a_k\right) - \frac{1}{(j-1)!}\left(b_1 + 2^{j-1} b_2 + \cdots + k^{j-1} b_k\right)$$

Μια μέθοδος έχει τάξη ακρίβειας $p \geq 1$ (δηλαδή είναι συνεπής), αν και μόνο αν $\boxed{C_0 = C_1 = 0}$

$\rho(\zeta) = a_0 + a_1 \zeta + \cdots + a_k \zeta^k$ χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$\rho'(\zeta) = a_1 + 2a_2 \zeta + 3a_3 \zeta^2 + \cdots + k a_k \zeta^{k-1}$

Τότε $C_0 = \rho(1)$

$\rho'(1) = a_1 + 2a_2 + \cdots + k a_k$

$\sigma(\zeta) = b_0 + b_1 \zeta + \cdots + b_k \zeta^k$

$$C_1 = \rho'(1) - \sigma(1)$$

Μια μέθοδος είναι συνεπής, αν και μόνο αν

$$\begin{cases} \rho(1) = 0 \\ \rho'(1) = \sigma(1) \end{cases}$$

Πρόταση: (Η σύγκλιση συνεπάγεται συνέπεια)

σύγκλιση ⇒ ευστάθεια

σύγκλιση ⇒ συνέπεια

Στο επόμενο μάθημα θα δούμε ότι

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ευστάθεια}\\ +\ \text{Συνέπεια}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Σύγκλιση}$$

Αν μια πολυβηματική μέθοδος είναι συγκλίνουσα, τότε είναι συνεπής.

Απόδειξη: Θέλουμε να αποδείξουμε:

i) $\rho(1)=0$

ii) $\rho'(1)=\sigma(1)$

i) $\rho(1)=0$:

Θεωρούμε το παράδειγμα $\begin{cases} y'=0, & 0\le t\le T, \\ y(0)=1 \end{cases}$

Λύση: $y(t)=1, \quad t\in[0,T]$

Μέθοδος: $\begin{cases} y^0, \ldots, y^{k-1} & \text{δεδομένα} \\ \alpha_k y^{n+k} + \cdots + \alpha_0 y^n = 0, & n=0,\ldots,N-k \end{cases}$

Επιλέγουμε $y^0=y^1=\cdots=y^{k-1}=1$, και από τη σύγκλιση της μεθόδου έπεται ότι $y^m \to 1, \ m\to\infty$

Άρα, συμπεραίνουμε ότι

$$\alpha_k\cdot 1 + \cdots + \alpha_0\cdot 1 = 0,$$

δηλ. $\rho(1)=0$

ii) $\rho'(1)=\sigma(1)$:

Θεωρούμε το παράδειγμα: $\begin{cases} y'=1, & 0\le t\le T, \\ y(0)=0 \end{cases}$

Λύση: $y(t)=t, \quad t\in[0,T]$

Μέθοδος: $(+)\begin{cases} y^0, \ldots, y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ \alpha_k y^{n+k} + \cdots + \alpha_0 y^n = h(b_k + \cdots + b_0), \quad k=0, \ldots, N-k \end{cases}$

Επειδή υποθέσαμε ότι η μέθοδος είναι συγκλίνουσα, κάθε λύση της (+) για την οποία ισχύει

$$\lim_{h \to 0} y^j = 0, \quad j=0, \ldots, k-1,$$

Θα πρέπει να ικανοποιεί την $(++)$ $\boxed{\lim_{N \to \infty} y^N = T.}$

Θέτουμε $M := \frac{\sigma(1)}{\rho'(1)}$ (Από τη σύγκλιση και το γεγονός ότι $\rho(1)=0$ έπεται ότι $\rho'(1) \neq 0$)

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $M=1$.

Ορίζουμε

$$y_h^n := n \cdot h \cdot M, \quad n=0, \ldots, N, \quad \text{με } h := \frac{T}{N}$$

Προφανώς $\lim_{h \to 0} y_h^j = 0, \quad j=0, \ldots, k-1.$

Επίσης $\sum_{j=0}^{k} a_j y_h^{n+j} = \sum_{j=0}^{k} a_j (n+j) h M = \cancel{k\sum} hM \sum_{j=0}^{k} a_j \cdot n + hM \sum_{j=0}^{k} j a_j$

$$= h \cdot Mn \underbrace{\sum_{j=0}^{k} a_j}_{=\rho(1)=0} + hM \underbrace{\sum_{j=0}^{k} j a_j}_{=\rho'(1)} = hM \cdot \rho'(1) = h\sigma(1) =$$

$$= h(b_k + \cdots + b_0)$$

Άρα ικανοποιεί την (+)

Σύμφωνα με την (++) έχουμε $\underbrace{\lim_{N \to \infty} (\underset{T}{\underset{\parallel}{Nh}} M)}_{TM} = T$

$\Rightarrow M=1$

12/01/20

$$(*)\begin{cases} y' = f(t,y), & a\leq t\leq b,\\ y(a)=y_0 \end{cases}$$

$$N\in\mathbb{N},\quad h=\frac{b-a}{N},\quad t^n=a+nh,\quad n=0,\ldots,N$$

$$(**)\begin{cases} y^0,\ldots,y^{k-1} & \text{δεδομένα}\\ a_k y^{n+k}+\ldots+a_0y^n = h\left[b_k f(t^{n+k},y^{n+k})+\ldots+b_0 f(t^n,y^n)\right], & n=0,\ldots, \end{cases}$$

Θεώρημα: Έστω ότι η τάξη ακρίβειας της κ-βηματικής μεθόδ (**) είναι $p\geq 1$ και η μέθοδος είναι ευσταθής. Έστω $y\in C^{p+1}[a,b]$ η λύση του (*) και ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή. Τότε υπάρχει $h_0>0$ τ.ω. για $0<h\leq h_0$ να ισχύει

$$\max_{0\leq n\leq N}|y(t^n)-y^n|\leq \tilde{C}\left[\max_{0\leq j\leq k-1}|y(t^j)-y^j|+h^p\max_{a\leq t\leq b}|y^{(p+2)}(t)|\right.$$

με σταθερά $\tilde{C}$ ανεξάρτητη των h και y.

Απόδειξη:

$$(+)\quad \rho^n := \underbrace{\sum_{j=0}^{q}\left[a_j y(t^{n+j})-hb_j y'(t^{n+j})\right]}_{(L_h y)(t^n)}$$

$n=0,\ldots,N-k$.

Αναπτύσσοντας κατά Taylor ως προς το σημείο t^n και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η τάξη ακρίβειας είναι p, οδηγούμαστε στην εκτίμηση

$$\max_{0\leq n\leq N-k}|\rho^n|\leq C' h^{p+1}\|y^{(p+1)}\|_\infty$$

Γράφουμε την (+) στη μορφή

$$(++)\ a_k y(t^{n+k})+\ldots+a_0 y(t^n)=h\left[b_k f(t^{n+k},y(t^{n+k}))+\ldots+b_0 f(t^n,y(t^n))\right]+\rho^n$$

Θέτουμε τώρα $\varepsilon^m := y(t^m) - y^m$. Αφαιρώντας τη (**) από την (*) προκύπτει

$$a_k \varepsilon^{n+k} + \dots + a_0 \varepsilon^n = h\{b_k[f(t^{n+k}, y(t^{n+k})) - f(t^{n+k}, y^{n+k})] + \dots + b_0[f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)]\} + p^n$$

$$g^m := \begin{cases} \dfrac{f(t^m, y(t^m)) - f(t^m, y^m)}{y(t^m) - y^m}, & \text{αν } \varepsilon_m \neq 0 \\ 0, & \text{αν } \varepsilon^m = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_k \varepsilon^{n+k} + \dots + a_0 \varepsilon^n = h(\boxed{b_k g^{n+k}}\varepsilon^{n+k} + \dots + \boxed{b_0 g^n}\varepsilon^n) + p^n$$

Τώρα $|b_i g^{n+i}| \leq |b_i| \cdot L \leq \max\limits_{0 \leq j \leq n} |b_j|)L =: B < \infty$

Σύμφωνα με την Πρόταση 4.1 έχουμε τότε

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\varepsilon^n| \leq C[\max_{0 \leq j \leq k-1} |\varepsilon^j| + N \max_{0 \leq n \leq N-k} |p^n|]$$

Επομένως $\max\limits_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq C[\max\limits_{0 \leq j \leq k-1} |y(t^j) - y^j| + \underset{b-a}{\underset{\shortparallel}{\boxed{Nh}}} C' h^p \max\limits_{a \leq t \leq b} |y^{(p+1)}(t)|]$

$$\leq \underbrace{C \max(1, (b-a) C')}_{\tilde{C}} [\max_{0 \leq j \leq k-1} |y(t^j) - y^j| + h^p \max_{a \leq t \leq b} |y^{(p+1)}(t)|]$$

Ένας κατάλληλος τρόπος υπολογισμού των $y^0, \dots, y^{k-1}$:
$y^0 = y_0$, υπολογίζουμε τα $y^1, \dots, y^{k-1}$ με μια μέθοδο RK τάξης p−1. Τότε $\max\limits_{0 \leq j \leq k-1} |y(t^j) - y^j| \leq C h^p$

Μέγιστη τάξη <u>ευσταθούς</u> k-βηματικής μεθόδου:

a) <u>Άμεση μέθοδος</u>: $p=k$

b) <u>Πεπλεγμένη μέθοδος</u>:

β1) κ περιττός: $p=\kappa+1$ (Παράδειγμα: μέθοδος τραπεζίου $\kappa=1,\ p=2$)

β2) κ άρτιος: $p=\kappa+2$ (Παράδειγμα: Μέθοδος του Simpson: $\kappa=2,\ p=4$)

17/03/2012

Πρακτική εφαρμογή πολυβηματικών μεθόδων

α) Μέθοδος πρόβλεψης - διόρθωσης

$$\begin{cases} y'=f(t,y) & ,\ a<t\le b, \\ y(a)=y_0 \end{cases}$$

Υπόθεση: Η f είναι μη γραμμική ως προς y

Πεπλεγμένη κ-βηματική μέθοδος:

$$a_k \boxed{y^{n+k}} + \dots + a_0 y^n = h\left[b_k f(t^{n+k}, \boxed{y^{n+k}}) + \dots + b_0 f(t^n, y^n)\right]$$

άγνωστος: y^{n+k}

Για να βρούμε το y^{n+k} πρέπει να λύσουμε μια μη γραμμική εξίσωση. Αυτό είναι γενικά αδύνατον!

Συνήθως προσεγγίζουμε το y^{n+k} χρησιμοποιώντας ζεύγη μεθόδων πρόβλεψης - διόρθωσης

Πρόβλεψη: $\tilde{a}_k y_0^{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{a}_i y^{n+i} = h\sum_{i=0}^{k-1} \tilde{b}_i f(t^{n+i}, y^{n+i})$

Διόρθωση: $a_k y_l^{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} a_i y^{n+i} = h b_k f(t^{n+k}, y_{l-1}^{n+k}) + h\sum_{i=0}^{k-1} b_i f(t^{n+i}, y^{n+i}),\ l=1,\dots,\nu$

Τα $y^n, \dots, y^{n+k-1}$ τα έχουμε ήδη υπολογίσει.

Πως υπολογίζουμε το y^{n+k};

1. Υπολογίζουμε το y_0^{n+k} με τη μέθοδο πρόβλεψης
2. "Διορθώνουμε" το y_0^{n+k} και υπολογίζουμε τα $y_1^{n+k}, \dots, y_\nu^{n+k}$ με τη

μέθοδο διόρθωσης.

Συνήθως, στην πράξη, επιλέγουμε $m=1, m=2$.

3. Θέτουμε $y^{n+k} := y_m^{n+k}$

Ιδιότητες μεθόδων (Π-Δ):

1. Ευστάθεια:

Η μέθοδος (Π-Δ), για οποιοδήποτε m, είναι ευσταθής, αν και μόνο αν η μέθοδος διόρθωσης είναι ευσταθής.
(Ασταθείς άμεσες μέθοδοι υψηλής τάξης είναι χρήσιμες ως μέθοδοι πρόβλεψης)

2. Τάξη ακρίβειας:

	Τάξη	
Διόρθωση:	p	p
Πρόβλεψη:	$\geq p-1$	$p-2$
(Π-Δ):	p ↑ για όλα τα m	$p-1$ ↑ για $m=1$ p ↑ για $m\geq 2$

Παραδείγματα:

1. Euler-τραπεζίου:

(Π) $y^{n+1}-y^n = hf(t^n, y^n)$

(Δ) $y^{n+1}-y^n = \frac{h}{2}\left[f(t^{n+1}, y^{n+1})+f(t^n, y^n)\right]$

Τάξη: 2 (για κάθε m)

2. Μέθοδος του Milne:

(Π) $y^{n+4}-y^n = \frac{4h}{3}\left[2f(t^{n+3}, y^{n+3})-f(t^{n+2}, y^{n+2})+2f(t^{n+1}, y^{n+1})\right]$

(Δ) $y^{n+4}-y^{n+2} = \frac{h}{3}\left(f(t^{n+4}, y^{n+4})+4f(t^{n+3}, y^{n+3})+f(t^{n+2}, y^{n+2})\right)$

Οι τάξεις και των δύο μεθόδων είναι 4.

β) Εκτίμηση τοπικού σφάλματος
Πολυβηματικές μέθοδοι με μεταβλητό βήμα

- Τοπικό σφάλμα στο σημείο $t = t^{n+k}$:

Υποθέτουμε ότι $\boxed{y^{n+i} = y(t^{n+i}),\quad i = 0, \dots, k-1}$

Με τη μέθοδο βρίσκουμε την προσέγγιση y^{n+k}

Τοπικό σφάλμα $\varepsilon^{n+k} := y(t^{n+k}) - y^{n+k}$

Πώς εκτιμούμε το τοπικό σφάλμα;

$$\alpha_k y^{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i y(t^{n+i}) = h\Big[b_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + h\sum_{i=0}^{k-1} b_i f(t^{n+i}, y(t^{n+i}))\Big]$$

$$\alpha_k y(t^{n+k}) + \quad -\|- \quad = h\big[b_k f(t^{n+k}, y(t^{n+k}))\big) + \quad -\|- \quad + \rho^n$$

Αφαιρούμε κατά μέλη:

$$\alpha_k \varepsilon^{n+k} = h\, b_k\big[f(t^{n+k}, y(t^{n+k})) - f(t^{n+k}, y^{n+k})\big] + \rho^n$$

Με $g^{n+k} := \begin{cases} 0 & \text{αν } y^{n+k} = y(t^{n+k}) \\ \dfrac{f(t^{n+k}, y(t^{n+k})) - f(t^{n+k}, y^{n+k})}{y(t^{n+k}) - y^{n+k}} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \boxed{\alpha_k \varepsilon^{n+k} = h b_k\, g^{n+k} \varepsilon^{n+k} + \rho^n}$$

$$|g^{n+k}| \leq L$$

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y(t^{n+i}) = h \cdot \sum_{i=0}^{k} b_i f(t^{n+i}, y(t^{n+i})) + \rho^n$$

$$\rho^n = \sum_{i=0}^{k} \big[\alpha_i y(t^{n+i}) - h b_i f(t^{n+i}, y(t^{n+i}))\big] = \sum_{i=0}^{k} \big[\alpha_i y(t^{n+i}) - h b_i y'(t^{n+i})\big]$$

$$= (L_h y)(t^n) = c_0 y(t^n) + c_1 h y'(t^n) + \dots$$

Υπόθεση: Τάξη μεθόδου $=p$

$$\boxed{p^n = C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(t^n) + O(h^{p+2})}$$

$$\varepsilon^{n+k} = y(t^{n+k}) - y^{n+k}$$

$$\alpha_k \varepsilon^{n+k} = h\beta_k g^{n+k} \varepsilon^{n+k} + p^n$$

$$|g^{n+k}| \leq L$$

$$p^n = C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(t^n) + O(h^{p+2})$$

Υπόθεση: $\alpha_k = 1$

$$\varepsilon^{n+k} = \frac{1}{1 - h\beta_k g^{n+k}} p^n = p^n [1 + O(h)] = C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(t^n) + O(h^{p+2})$$

$$y(t^{n+k}) - y^{n+k} = C_{p+1} h^{p+1} \boxed{y^{(p+1)}(t^n)} + O(h^{p+2})$$

Έστω ότι έχουμε και άλλη μία κ-βηματική μέθοδο $\tilde{\alpha}_i, \tilde{b}_i, i=0,\dots,k$ με $\tilde{\alpha}_k = 1$, $\boxed{\text{τάξης} = p}$

Τότε $y(t^{n+k}) - \tilde{y}^{n+k} = \tilde{C}_{p+1} \boxed{h^{p+1} y^{(p+1)}(t^n)} + O(h^{p+2})$

Υπόθεση: $\tilde{C}_{p+1} \neq C_{p+1}$

Αφαιρούμε κατά μέλη και έχουμε

$$y^{n+k} - \tilde{y}^{n+k} = -(C_{p+1} - \tilde{C}_{p+1}) h^{p+1} y^{(p+1)}(t^n) + O(h^{p+2})$$

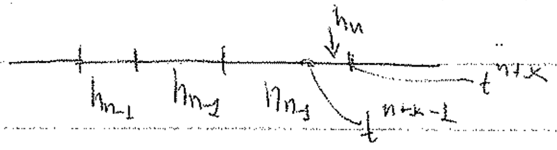
$$\Rightarrow h^{p+1} y^{(p+1)}(t^n) = -\frac{1}{C_{p+1} - \tilde{C}_{p+1}} (y^{n+k} - \tilde{y}^{n+k}) - O(h^{p+2})$$

Συμπέρασμα:

$$y(t^{n+k}) - y^{n+k} \overset{\sim}{\neq} -\frac{C_{p+1}}{C_{p+1} - \tilde{C}_{p+1}} (\overset{\downarrow}{y^{n+k}} - \overset{\downarrow}{\tilde{y}^{n+k}}) + \cancel{O(h^{p+2})}$$

Η επιλογή του βήματος γίνεται όπως στις μεθόδους RK

<u>Δυσκολίες στην υλοποίηση:</u>



$h_n \neq h_{n-1}$

<u>Δύο διέξοδοι:</u>

1. Παρεμβολή για υπολογισμό νέων προσεγγίσεων
2. Σχεδιάζουμε πολυβηματικές μεθόδους με μεταβλητό βήμα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

22/12/2

4.4

$y^0 = 0, \ y^1 = 1,$

$y^{n+2} := y^{n+1} + y^n, \ n = 0, 1, 2, \dots$

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$

Τύπος για το y^n;

Ακολουθία του Fibonacci

$(*) \ y^{n+2} - y^{n+1} - y^n = 0$

$z^2 - z - 1 = 0$

Ρίζες: $z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$a_k y^{n+k} + a_{k-1} y^{n+k-1} + \dots + a_0 y^n = 0$

$a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_0 = 0$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Οι ακολουθίες $(z_1)^n$ ← δύναμη και $(z_2)^n$ είναι λύσεις της εξίσωσης διαφορών

Η γενική λύση της (*) (χωρίς να πούμε κάτι για τα y^0, y^1) είναι

$$y^n = c_1 (z_1)^n + c_2 (z_2)^n \quad \text{με } c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Για να βρούμε τη ζητούμενη λύση (για τα δεδομένα y^0, y^1) αρκεί να επιλέξουμε τα c_1, c_2 έτσι ώστε:

$$c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 0 \leftarrow y^0$$

$$c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \leftarrow y^1$$

Δηλαδή

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 (1+\sqrt{5}) + c_2 (1-\sqrt{5}) = 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1+c_2=0 \\ c_1\sqrt{5}-c_2\sqrt{5}=2 \end{array}\right\} \rightleftarrows \begin{array}{l} c_1+c_2=0 \\ c_1-c_2=\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{array}$$

Άρα $c_1=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $c_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

Ζητούμενος τύπος: $y^n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}_0$

12/01/2012

4.2

Έστω p οποιοσδήποτε φυσικός

$$(L_hy)(t)=\sum_{j=0}^{k}\left[\alpha_j y(t+jh)-hb_j y'(t+jh)\right] \qquad \left\{ c_0y(t)+c_1hy'(t)+c_2h^2y''(t)+\dots \right.$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\left\{\alpha_j\sum_{v=0}^{p}\frac{(jh)^v}{v!}y^{(v)}(t)-hb_j\sum_{v=0}^{p-1}\frac{(jh)^v}{v!}y^{(v+1)}(t)\right\}+O(h^{p+1})$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\left\{\alpha_j y(t)+\alpha_j\sum_{v=1}^{p}\frac{(jh)^v}{v!}y^{(v)}(t)-hb_j\sum_{v=1}^{p}\frac{(jh)^{v-1}}{(v-1)!}y^{(v)}(t)\right\}+O(h^{p+1})$$

$$\sum_{v=0}^{p-1}\alpha_{v+1}=\alpha_1+\dots+\alpha_p=\sum_{v=1}^{p}\alpha_v$$

$$=\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\right)}_{=C_0}y(t)+\sum_{j=0}^{k}\left[\alpha_j\boxed{\sum_{v=1}^{p}}\frac{(jh)^v}{v!}y^{(v)}(t)-hb_j\boxed{\sum_{v=1}^{p}}\frac{(jh)^{v-1}}{(v-1)!}y^{(v)}(t)\right]+O(h$$

$$=C_0y(t)+\sum_{v=1}^{p}h^v\left[\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\frac{j^v}{v!}-b_j\frac{j^{v-1}}{(v-1)!}\right]y^{(v)}(t)+O(h^{p+1})$$

$$=C_0y(t)+\sum_{j=0}^{k}(\alpha_j\cdot j-b_j)\,hy'(t)+\sum_{v=2}^{p}\left[\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\frac{j^v}{v!}-b_j\frac{j^{v-1}}{(v-1)!}\right]h^vy^{(v)}(t+O(h^{p+1}$$

$$=C_0y(t)+\underbrace{\left[\sum_{j=1}^{k}j\alpha_j-\sum_{j=0}^{k}b_j\right]}_{C_1}hy'(t)+\sum_{v=2}^{p}\underbrace{\left[\frac{1}{v!}\sum_{j=1}^{k}j^vx_j-\frac{1}{(v-1)!}\sum_{j=1}^{k}j^{v-1}b_j\right]}_{C_v=}h^vy+O(h^{p+1})($$

A4.3

4.1

$$a_2 y^{n+2} + a_1 y^{n+1} + a_0 y^n = h f^{n+2}$$

$b_2 = 1$, $b_1 = b_0 = 0$

p=2; ευστάθεια;

$p \geq 2$: $C_0 = C_1 = C_2 = 0$

$$a_2 + a_1 + a_0 = 0$$
$$a_1 + 2a_2 = 1$$
$$\frac{1}{2}(a_1 + 4a_2) = 2$$

$$\left.\begin{array}{r} a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 1 \\ a_1 + 4a_2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow a_2 = \frac{3}{2},\ a_1 = -2,\ a_0 = \frac{1}{2}$$

$$C_3 = \frac{1}{3!}(a_1 + 2^3 a_2) - \frac{1}{2!} 2^2 \cdot 1 = \dots = -\frac{1}{3} \neq 0$$

Άρα $p=2$.

Ευστάθεια:

$$p(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = \frac{3}{2} z^2 - 2z + \frac{1}{2}$$

$z_1 = 1$, $z_2 = \frac{1}{3}$

Η συνθήκη των ριζών ικανοποιείται, άρα η μέθοδος είναι ευσταθης

Αυ.4

4.6

17/01/2012

$$y^{n+2} + \overset{\downarrow}{a_1} y^{n+1} + \overset{\downarrow}{a_0} y^n = h\left(\overset{\downarrow}{b_2} f^{n+2} + \overset{\downarrow}{b_1} f^{n+1} + \overset{\downarrow}{b_0} f^n\right)$$

$p \geq 2$, $p \geq 3$, $p \geq 4$ $p = 5$, ευστάθεια

$C_0 = a_0 + a_1 + 1$

$C_1 = a_1 + 2 - (b_0 + b_1 + b_2)$

$C_j = \frac{1}{j!}(a_1 + 2^j) - \frac{1}{(j-1)!}(b_1 + 2^{j-1} b_2)$, $j \geq 2$

a) $p \geq 2$: $C_0 = C_1 = C_2 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \textcircled{a_0} + a_1 + 1 = 0 \\ a_1 + 2 - (\textcircled{b_0} + b_1 + b_2) = 0 \\ \frac{1}{2}(a_1 + 4) - (b_1 + 2b_2) = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_0,\ b_0 \text{ αυθαίρετα} \\ a_1 = -1 - a_0 \\ b_1 = \frac{1}{2} - 3a_0 - 2b_0 \\ b_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} a_0 + b_0 \end{array}\right.$$

Διπαραμετρική οικογένεια λύσεων

$p \geq 3$: Πρέπει επιπλέον $C_3 = 0$, δηλαδή $\frac{1}{6}(a_1 + 8) + \frac{1}{2}(b_1 + 4b_2) = 0$

Αντικαθιστώντας τα a_1, b_1, b_2 από τις σχέσεις που βρήκαμε προκύπτει $\boxed{a_0 = -\frac{1}{5} - \frac{12}{5} b_0}$

b_0 τυχαία

$a_0 = -\frac{1}{5} - \frac{12}{5} b_0$

$a_1 = -\frac{4}{5} + \frac{12}{5} b_0$

$$b_1 = \frac{4}{5} + \frac{8}{5} b_0$$
$$b_2 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} b_0$$

<u>$p \geq 4$:</u> Πρέπει επιπλέον $C_4 = 0$,

δηλ. $\frac{1}{24}(a_1 + 16) - \frac{1}{6}(b_1 + 8b_2) = 0$

Από εδώ προκύπτει $b_0 = \frac{1}{3}$

Άρα

$$a_0 = -1$$
$$a_1 = 0$$
$$b_0 = \frac{1}{3}$$
$$b_1 = \frac{4}{3}$$
$$b_2 = \frac{1}{3}$$

<u>$p = 5$</u> : $C_5 = \dots = -\frac{1}{5!}\frac{4}{3} \neq 0$

Άρα $p = 4$

19/01/201

Ευστάθεια

1. $p \geq 4$ $(p = 4)$: $a_0 = -1$, $a_1 = 0$

<u>Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:</u>

$\rho(z) = z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$

ρίζες: $z_1 = 1$, $z_2 = -1$

Ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών, άρα η μέθοδος είναι ευσταθ

2. $p \geq 3$: $a_1 = \frac{4}{5}(3b_0 - 1)$

$a_0 = -\frac{1}{5}(12b_0 + 1)$

$b_0 \in \mathbb{R}$

$$\rho(z) = z^2 + \frac{4}{5}(3b_0 - 1)z - \frac{1}{5}(12b_0 + 1)$$
$$= z(z-1) + \frac{12}{5}b_0(z-1) + \frac{1}{5}(z-1) =$$

$$\left\{\begin{array}{l} z\left(-1 + \frac{12}{5}b_0 + \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{12}{5}b_0 - \frac{4}{5}\right)z \\ -\frac{12}{5}b_0 - \frac{1}{5} = -\frac{1}{5}(12b_0+1) \end{array}\right\}$$

$$= (z-1)\left[z + \frac{12}{5}b_0 + \frac{1}{5}\right]$$

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -\frac{1}{5}(12b_0+1)$$

Η μέθοδος είναι ευσταθής, αν και μόνο αν,

$$-1 \leq -\frac{1}{5}(12b_0+1) < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < b_0 \leq \frac{1}{3}$$

3. $\rho \geq 2$: $a_0 \in \mathbb{R}, \quad a_1 = -1 - a_0$

$$\begin{aligned} \rho(z) &= z^2 - (1+a_0)z + a_0 \\ &= \underbrace{z^2 - z}_{} - a_0(z-1) \\ &= z(z-1) \\ &= (z-1)(z-a_0) \end{aligned}$$

$$z_1 = 1, \quad z_2 = a_0$$

Η μέθοδος είναι ευσταθής, αν και μόνο αν,

$$-1 \leq a_0 < 1$$

4.15 τριβηματική μέθοδος

$$a_3 = 1, \quad a_2 = -\frac{11}{6}, \quad a_1 = 1, \quad a_0 = -\frac{1}{6}$$

$$b_3 = \frac{1}{12}, \quad b_2 = \frac{1}{6}, \quad b_1 = -\frac{1}{2}, \quad b_0 = \frac{7}{12}$$

Ευσταθής;

$$\begin{aligned} \rho(z) &= a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \\ &= z^3 - \frac{11}{6}z^2 + z - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\rho(1) = 1 - \frac{11}{6} + 1 - \frac{1}{6} = 2 - \frac{12}{6} = 0$$

$$\rho(z) = (z^3 - 1) - \frac{11}{6}(z^2 - 1) + z - 1$$

$$\left(-\frac{1}{6} + 1 - \frac{11}{6} = -\frac{12}{6} + 1 = -1 \right)$$

$$= (z-1)(z^2+z+1) - \frac{11}{6}(z-1)(z+1) + (z-1)$$

$$= (z-1)\underbrace{\left[z^2+z+1 - \frac{11}{6}(z+1) + 1 \right]}_{z^2 + \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}}$$

$$= \frac{1}{6}(z-1)(6z^2 - 5z + 1)$$

$z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{1}{2}, \quad z_3 = \frac{1}{3}$

Μέθοδος ευσταθής.

4.16

Συνεπής;

$C_0 = 0 \Leftrightarrow \rho(1) = 0$ ✓

$C_1 = 0 \Leftrightarrow \rho'(1) = \sigma(1)$

$$\rho'(z) = 3z^2 - \frac{11}{3}z + 1 \Rightarrow \rho'(1) = 3 - \frac{11}{3} + 1 = 4 - \frac{11}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\sigma(z) = b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0$$
$$= \frac{1}{12}z^3 + \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{7}{12}$$

$$\sigma(1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{7}{12} = \frac{8}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \rho'(1) = \sigma(1)$ ✓

Άρα η μέθοδος είναι συνεπής.

4.21

$\alpha_k, \dots, \alpha_0, \quad b_k, \dots, b_0$

Υπόθεση: Η μέθοδος είναι συνεπής και ευσταθής

ΝΔΟ: $b_k + \dots + b_0 \neq 0$

Απόδειξη: Έστω $b_k + \dots + b_0 = 0$, δηλ. $\sigma(1) = 0$

Τώρα $\left.\begin{matrix} \rho(1)=0 \\ \rho'(1)=\underbrace{\sigma(1)}_{0} \end{matrix}\right\}$ (από συνέπεια)

$\Rightarrow \rho(1) = \rho'(1) = 0 \Rightarrow$ Το 1 πολλαπλή ρίζα του ρ

$\Rightarrow$ Το ρ δεν ικανοποιεί την συνθήκη των ριζών

$\Rightarrow$ Μέθοδος όχι ευσταθής ↯

4.22

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

f συνεχής

$\forall t \in [a,b], \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$[f(t,y_1) - f(t,y_2)](y_1 - y_2) \le 0$

(Δηλ. $f(t,\cdot)$ φθίνουσα)

Διβηματική μέθοδος ανάδρομων διαφορών

$$\begin{cases} y^0, y^1 \text{ δεδομένα} \\ \frac{3}{2} y^{n+2} - 2y^{n+1} + \frac{1}{2} y^n = h f(t^{n+2}, y^{n+2}), \quad n = 0, \dots, N-2 \end{cases}$$

ΝΔΟ: Προσεγγίσεις καλά ορισμένες για κάθε h

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι το y^{n+2} είναι καλά ορισμένο, δηλ. ότι η εξίσωση

$\frac{3}{2} x - 2y^{n+1} + \frac{1}{2} y^n = hf(t^{n+2}, x)$ έχει μοναδική λύση, Α 4.9

Δηλ. ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \overset{\leftarrow \text{γνήσια αύξουσα}}{\frac{3}{2}x} \underbrace{- 2y^{n+1} + \frac{1}{2}y^n - hf(t^{n+2}, x)}_{\text{αύξουσα}}$$

έχει μοναδική ρίζα.

Μοναδικότητα ρίζας: Η g είναι γνήσια αύξουσα, άρα έχει το πολύ μία ρίζα

Ύπαρξη: Η g είναι συνεχής

Για $x \leq 0$ έχουμε

$$g(x) \leq \frac{3}{2}x \underbrace{- 2y^{n+1} + \frac{1}{2}y^n - hf(t^{n+2}, 0)}_{\text{σταθερά}} \to -\infty, \text{ για } x \to -\infty$$

Άρα $g(x) \to -\infty$, για $x \to -\infty$

Οπότε για x αρνητικό και $|x|$ αρκετά μεγάλη, το $g(x)$ γίνεται αρνητικό, άρα η g παίρνει και αρνητικές τιμές

Για $x \geq 0$ έχουμε

$$g(x) \geq \frac{3}{2}x \underbrace{- 2y^{n+1} + \frac{1}{2}y^n - hf(t^{n+2}, 0)}_{\text{σταθερά}} \to \infty, \text{ για } x \to \infty$$

οπότε $g(x) \to \infty$ για $x \to \infty$

Άρα για αρκετά μεγάλο x το $g(x)$ είναι θετικό.

Σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής η g παίρνει και την τιμή 0, άρα έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Συνολικά, η g έχει ακριβώς μία ρίζα

4.03

$$y^{n+3} - (a+1)^2 y^{n+2} + a(a^2+2a+2)y^{n+1} - a^2(a+1)y^n = hf(t^{n+3}, y^{n+3})$$

Για ποια a έχουμε ευστάθεια;

$p(z) = z^3 - (a+1)^2 z^2 + a(a^2+2a+2)z - a^2(a+1)$

$p(1) = 0$

$p(z) = \underbrace{(z-1)}_{z_1=1} p_1(z)$ με $p_1(z) = z^2 - a(a+2)z + a^2(a+1)$

A4.10

$z_2 = a$, $z_3 = \underbrace{a(a+1)}_{= a^2+a \geq a}$

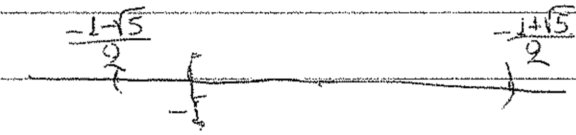
Παρατήρηση: $z_3 \geq z_2$

Μέθοδος ευσταθής αν και μόνο αν

$z_2 \geq -1$ και $z_3 < 1$, δηλ.

$a \geq -1$ και $a^2+a<1$

$$a^2+a<1 \Leftrightarrow \underbrace{a^2+a-1}_{a_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}<0 \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < a < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$



Συνολικά: Μέθοδος ευσταθής, αν και μόνο αν

$$\boxed{-1 \leq a < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$