ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μέθοδοι Runge-Kutta (Butcher)

Συμβολισμοί και Παραδείγματα

$q \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{q,q}$, $\tau, b \in \mathbb{R}^q$

$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,q}$, $\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_q \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array} = \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & \cdots & b_q & \end{array}$$

Μητρώο του Butcher

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \dfrac{b-a}{N}$, $t^n := a + nh$, $n = 0, \dots, N$

$\boxed{y^n \longrightarrow y^{n+1}}$ $\quad$ | $\quad t^{n,i} := t^n + \tau_i h$, $i = 1, \dots, q$

$$(*) \quad \boxed{y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \qquad i = 1, \dots, q}$$

$(*)$: Σύστημα με q εξισώσεις και q αγνώστους, τους $y^{n,1}, \dots, y^{n,q}$

q: πλήθος σταδίων της μεθόδου

$y^{n,1}, \dots, y^{n,q}$ ενδιάμεσα στάδια

$$y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i})$$

1. Πώς οδηγούμαστε σε μια μέθοδο RK;

$$\int_0^1 \psi(s)\,ds \approx \sum_{i=1}^{q} \overset{\text{βάρη}}{b_i}\, \psi(\overset{\text{κόμβοι}}{\tau_i})$$

Κατά κανόνα: $0 \le \tau_i \le 1$, $i=1,\dots,q$

$$\underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt}_{y(t^{n+1})-y(t^n)} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t,y(t))\,dt$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) = y(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t,y(t))\,dt = y(t^n) + h\int_0^1 f(t^n+hs, y(t^n+hs))\,ds \approx$$

$\left(\begin{array}{c} t = t^n + hs \\ dt = h\,ds \end{array}\right)$

$$\approx y(t^n) + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^n + h\tau_i, y(t^n+h\tau_i))$$

$$\boxed{y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y(t^{n,i}))}$$

$$\int_{t^n}^{t^{n,i}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n,i}} f(t,y(t))\,dt \Rightarrow \quad y(t^{n,i}) = y(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n,i}} f(t,y(t))\,dt =$$

(Για να βρούμε τα $y(t^{n,i})$)

$t = t^n + hs$

$\cancel{t^n} + h\tau_i = \cancel{t^n} + hs \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s = \tau_i$

$$= y(t^n) + h\int_0^{\tau_i} f(t^n+hs, y(t^n+hs))\,ds$$

$$\left\{ \int_0^{\tau_i} \psi(s)\,ds \approx \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\,\psi(\tau_j), \quad i=1,\dots,q \right\}$$

$$\approx y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y(t^{n,j}))$$

$$\underbrace{\boxed{y(t^{n,i})}}_{y^{n,i}} \approx \underbrace{y(t^n)}_{y^n} + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, \underbrace{y(t^{n,j})}_{y^{n,j}})$$

Ειδικές περιπτώσεις

• Ο A γνήσια κάτω τριγωνικός

Δηλ. $a_{ij}=0$ για $j \ge i$

$y^{n,1} = y^n$

$y^{n,2} = y^n + h a_{21} f(t^{n,1}, y^{n,1})$

$\vdots$

$y^{n,q} = y^n + h \sum_{j=1}^{q-1} a_{qj} f(t^{n,j}, y^{n,j})$

Δεν χρειάζεται να λύσουμε σύστημα.

Οι μέθοδοι RK σε αυτή την περίπτωση λέγονται άμεσες.

Όλες οι άλλες λέγονται πεπλεγμένες.

• A κάτω τριγωνικός (πεπλεγμένη)

$\boxed{y^{n,1}} = y^n + h a_{11} f(t^{n,1}, \boxed{y^{n,1}}) \rightsquigarrow y^{n,1}$

$\boxed{y^{n,2}} = y^n + h a_{21} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + h a_{22} f(t^{n,2}, \boxed{y^{n,2}}) \to y^{n,2}$

$\vdots$

Οι μέθοδοι λέγονται ημιπεπλεγμένες.

Παραδείγματα

1.
$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad (q=1)$$

άμεση μέθοδος (πίνακας κάτω τριγωνικός)

$y^{n,1} = y^n$

$y^{n+1} = y^n + h f(t^n, \underbrace{y^{n,1}}_{= y^n})$, $\quad t^{n,1} = t^n$

$y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n)$

άμεση μέθοδος του Euler

$$\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad q = 1 \quad (\text{πεπλεγμένη})$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$t^{n,1} = t^n + h = t^{n+1}$

$$y^{n,1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n,1})$$
$$y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n,1})$$
$$\Rightarrow y^{n,1} = y^{n+1}$$

Άρα

$$\boxed{y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1})}$$

πεπλεγμένη Euler

$$\begin{array}{c|c} 3 & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array} \qquad q = 1, \ \text{πεπλεγμένη}$$

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

$t^{n,1} = t^n + \frac{1}{2} h$

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n + h \frac{1}{2} f(t^n + \frac{h}{2}, y^{n,1}) \\ y^{n+1} = y^n + h f(t^n + \frac{h}{2}, y^{n,1}) \end{cases}$$

, λύνω ως προς αυτό

$$2(y^{n,1} - y^n) = y^{n+1} - y^n \Leftrightarrow 2y^{n,1} = y^{n+1} + y^n \Leftrightarrow \boxed{y^{n,1} = \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})}$$

$$y^{n+1} = y^n + h f(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1}))$$

<u>μέθοδος του μέσου</u>

$q = 1$, $\boxed{p = 2}$

Για δεδομένο q, ισχύει πάντα $p \leq 2q$, και για μια ακριβώς μέθοδος RK ισχύει <u>$p = 2q$</u>

Παραδείγματα

4

0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$q=2$

πεπλεγμένη

$$y^{n,1}=y^n$$

$$y^{n,2}=y^n+h\frac{1}{2}f(t^{n,1},y^{n,1})+h\cdot\frac{1}{2}f(t^{n,2},y^{n,2})=\underbrace{y^n+\frac{1}{2}h[f(\overset{t^n}{t^{n,1}},\overset{y^n}{y^{n,1}})+f(\overset{t^n+1h=t^{n+1}}{t^{n,2}},y^{n,2})]}$$

$$y^{n+1}=\underbrace{y^n+\frac{1}{2}h[f(t^{n,1},y^{n,1})+f(t^{n,2},y^{n,2})]}$$

Άρα $y^{n,2}=y^{n+1}$

$$y^{n+1}=y^n+\frac{1}{2}h[f(t^n,y^n)+f(t^{n+1},y^{n+1})]$$

μέθοδος του τραπεζίου

5

0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
0	1	

$q=2$

άμεση (γιατί ο πίνακας είναι γνήσια κάτω τριγ)

$$y^{n,1}=y^n$$

$$y^{n,2}=y^n+\frac{1}{2}hf(t^{n,1},y^{n,1})$$

$$y^{n+1}=y^n+hf(t^{n,2},y^{n,2})$$

$$y^{n,2}=y^n+\frac{h}{2}f(\overset{t^n+0\cdot h=t^n}{t^n},y^n)$$

$$y^{n+1}=y^n+hf(t^n+\frac{h}{2},y^n+\frac{h}{2}f(t^n,y^n))$$

(επειδή έχω το μέσο εκεί)

$p=2$

- άμεση μέθοδος του μέσου
- βελτιωμένη μέθοδος του Euler

γιατί $p=2$

είναι στο προσέγγιση (γιατί είναι $\frac{h}{2}$)

t^n t^{n+1}

22/11/2011

6

$$\begin{array}{cc|c} \mu & 0 & \mu \\ 1-2\mu & \mu & 1-\mu \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

$\mu \in \mathbb{R}$

Αν $\mu \neq \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$ $\quad p=2$

Αν $\mu = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$ $\quad p=3$

διαγώνιος πεπλεγμένη Runge Kutta $q=2$ $p=3$ (τάξη)

DIRK (2,3)

7

$$\begin{array}{cc|c} \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\mu & \frac{1}{2}-\mu \\ \frac{1}{4}+\mu & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}+\mu \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

$\mu = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$\boxed{p=4}$

8

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \end{array}$$

$p=q=3$

μέθοδος Kutta 3ης τάξης

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \hline \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \end{array}$$

$p=q=3$

μέθοδος Heun τρίτης τάξης

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 3/4 \\ \hline \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \end{array}$$

$p=q=3$

μέθοδος του Ralston

9

$q=4$

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \end{array}$$

$p=4$

κλασική μέθοδος RK

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline & b^T \end{array} = \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & \cdots & b_q & \end{array}$$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n := a + nh$, $n = 0, \ldots, N$

$y^n \longrightarrow y^{n+1}$: $\quad (t^{n,i} := t^n + \tau_i h, \; i = 1, \ldots, q)$

$$(\#) \begin{cases} (*) \; \boxed{y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \; i = 1, \ldots, q} \\ y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{cases}$$

3.2 Επιλυσιμότητα και ευστάθεια μεθόδων RK

- Επιλυσιμότητα

1η Περίπτωση: Άμεσες μέθοδοι

Προφανώς τα $y^{n,i}$ ορίζονται μονοσήμαντα (υπολογίζονται με πράξεις), οπότε η μέθοδος είναι καλά ορισμένη.

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{n,i} = y^n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \\ a_{ii} = a_{i,i+1} = \cdots = a_{iq} = 0 \end{array} \right\}$$

2η Περίπτωση: Πεπλεγμένες μέθοδοι

Είναι η μέθοδος καλά ορισμένη;

Δηλαδή έχει το σύστημα (*) ακριβώς μία λύση;

Υπόθεση:

$$(**) \begin{cases} \exists \; L \ge 0 \;\; \forall \; t \in [a,b] \;\; \forall \; y_1, y_2 \in \mathbb{R} \\ |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L|y_1 - y_2| \end{cases}$$

Πρόταση: (Ύπαρξη και μοναδικότητα προσεγγίσεων)
Έστω ότι ισχύει η $(**)$ και $h < \frac{1}{\gamma}$
με $\gamma := L \max_{1\le i\le q} \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|$.

Τότε το σύστημα $(*)$ έχει ακριβώς μία λύση

Απόδειξη:
$$\begin{pmatrix} y^{n,1} \\ y^{n,2} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{1j} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \\ y^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{2j} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \\ \vdots \\ y^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{qj} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \end{pmatrix}$$

άγνωστοι: $y^{n,1}, \dots, y^{n,q}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$$

$$x^i = y^{n,i}$$

$$\boxed{x = F(x)}$$

$$F_i(x) = y^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, x_j)$$
$$i = 1, \dots, q$$

Ορίζουμε $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$, $F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_q(x) \end{pmatrix}$

με $F_i(x) = y^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, x_j)$, $i = 1, \dots, q$

Για να αποδείξουμε ότι το $(*)$ έχει ακριβώς μία λύση, αρκεί να αποδείξουμε ότι το σύστημα $x = F(x)$ έχει ακριβώς μία λύση, δηλαδή ότι η F έχει ακριβώς ένα <u>σταθερό σημείο</u>.
Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα της συστολής.
Για $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^q$ έχουμε

$$F_i(x) - F_i(\tilde{x}) = h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, x_j) - h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, \tilde{x}_j)$$

$$\Rightarrow F_i(x) - F_i(\tilde{x}) = h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} [f(t^{n,j}, x_j) - f(t^{n,j}, \tilde{x}_j)]$$

$\Rightarrow |F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \le h \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \cdot |f(t^{n,j}, x_j) - f(t^{n,j}, \tilde{x}_j)|$

$\Rightarrow |F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \le h \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \, L \, |x_j - \tilde{x}_j| = hL \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \, |x_j - \tilde{x}_j|$

$|x_j - \tilde{x}_j| \le \max_{1 \le \ell \le q} |x_\ell - \tilde{x}_\ell|$

$\le (hL \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|) \max_{1\le \ell \le q} |x_\ell - \tilde{x}_\ell| \le (h \underbrace{L \max_{1 \le i \le q} \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|}_{\gamma}) \max_{1 \le \ell \le q} |x_\ell - \tilde{x}_\ell|$

$F_i(x) - F_i(\tilde{x}) \le \underbrace{\gamma h \max_{1\le \ell \le q} |x_\ell - \tilde{x}_\ell|}_{\text{ανεξάρτητο του } i}$

$\Rightarrow \underbrace{\max_{1 \le i \le q} |F_i(x) - F_i(\tilde{x})|}_{= \|F(x) - F(\tilde{x})\|_\infty} \le \gamma h \underbrace{\max_{1 \le \ell \le q} |x_\ell - \tilde{x}_\ell|}_{= \|x - \tilde{x}\|_\infty}$

$\forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^q \quad \|F(x) - F(\tilde{x})\|_\infty \le \underbrace{\gamma h}_{<1} \|x - \tilde{x}\|_\infty$

Άρα η F είναι συστολή, οπότε έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο

- Ευστάθεια

- Συνεχές πρόβλημα

$y_0 \rightsquigarrow y$

$z_0 \rightsquigarrow z$

$\max_{a \le t \le b} |y(t) - z(t)| \le e^{L(b-a)} |y_0 - z_0|$

- Μέθοδος του Euler:

$y^0 \rightsquigarrow y^n$

$z^0 \rightsquigarrow z^n$

$\max_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le \underbrace{e^{L(b-a)}}_{C \text{ ανεξ. του } h} |y^0 - z^0|$

Ορισμός: (Ευστάθεια μεθόδων RK)

Μια μέθοδος RK λέγεται ευσταθής, αν για κάθε πρόβλημα αρχικών τιμών (1) τ.ω. η f να ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz (**)

υπό τις προϋποθέσεις της προηγούμενης πρότασης, υπάρχει σταθερά C, ανεξάρτητη του h, τ.ω. για προσεγγίσεις $y^0, \dots, y^N$ και $z^0, \dots, z^N$ τ.ω.

$$\begin{cases} z^{n,i} = z^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, z^{n,j}) \\ z^{n+1} = z^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, z^{n,i}) \end{cases}, \quad n=0,\dots,N-1,$$

να ισχύει

$$\max_{0\le n\le N} |y^n - z^n| \le C |y^0 - z^0|$$

Πρόταση: (Ευστάθεια μεθόδων RK)

Έστω μια μέθοδος RK, έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις της προηγούμενης πρότασης, και έστω $y^0, \dots, y^N$ οι προσεγγίσεις που δίνονται από την (**). Θεωρούμε και $z^{n,i}, z^n \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$z^{n,i} = z^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, z^{n,j})$$
$$z^{n+1} = z^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, z^{n,i}) + p^n, \quad n=0,\dots,N-1,$$

με $p^n \in \mathbb{R}$.

Τότε, υπάρχουν σταθερές C_1, C_2, ανεξάρτητες των y^n, z^n, p^n και h τ.ω.

$$(1) \quad \max_{0\le n\le N} |y^n - z^n| \le C_1 |y^0 - z^0| - \frac{C_2}{h} \max_{0\le n\le N-1} |p^n|$$

Έστω ότι ισχύει η (1). Επιλέγουμε $p^0, \dots, p^{N-1} = 0$.

Τότε η (1) δίνει

$$\max_{0\le n\le N} |y^n - z^N| \le C_1 |y^0 - z^0|,$$ δηλαδή ευστάθεια.

Απόδειξη:

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε

$$y^{n+1} - z^{n+1} = y^n - z^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i [f(t^{n,i}, y^{n,i}) - f(t^{n,i}, z^{n,i})] - p^n$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \le |y^n - z^n| + h \sum_{i=1}^{q} |b_i| \cdot \underbrace{|f(t^{n,i}, y^{n,i}) - f(t^{n,i}, z^{n,i})|}_{\le L |y^{n,i} - z^{n,i}|} + |p^n|$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \le |y^n - z^n| + hL \sum_{i=1}^{q} |b_i| \underbrace{|y^{n,i} - z^{n,i}|}_{\le \max_{1\le i\le q} |y^{n,i} - z^{n,i}|} + |p^n|$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \le |y^n - z^n| + \left(hL\sum_{i=1}^{q}|b_i|\right)\left(\max_{1\le l\le q}|y^{n,l} - z^{n,l}|\right) + |p^n|$$

Ευστάθεια μεθόδων RK 24/11/2011

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$\exists L \ge 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n := a + nh$, $n = 0, \dots, N$

$$\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array} \qquad t^{n,i} = t^n + \tau_i h$$

$$\left.\begin{cases} y^0 = y_0 \\ y^{n,i} = y^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \quad i = 1, \dots, q \\ y^{n+1} = y^n + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{cases}\right\} n = 0, \dots, N-1$$

$z^0 \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} z^{n,i} = z^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, z^{n,j}), \quad i = 1, \dots, q, \\ z^{n+1} = z^n + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, z^{n,i}) + p_n \end{array}\right\} n = 0, \dots, N-1$$

ΝΔΟ: $\max_{0\le n\le N}|y^n - z^n| \le C_1|y^0 - z^0| + \frac{C_2}{h}\max_{0\le n\le N-1}|p^n|$

ανεξ. του h

$$y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h\sum_{i=1}^{q} b_i[f(t^{n,i}, y^{n,i}) - f(t^{n,i}, z^{n,i})] - p^n$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \le |y^n - z^n| + h\sum_{i=1}^{q}|b_i|\underbrace{|f(t^{n,i}, y^{n,i}) - f(t^{n,i}, z^{n,i})|}_{\le L|y^{n,i} - z^{n,i}|} + |p^n|$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \le |y^n - z^n| + hL\sum_{i=1}^{q}|b_i|\boxed{\max_{1\le l\le q}|y^{n,l} - z^{n,l}| + |p^n|} \quad (*)$$

θα δ. $\le C|y^n - z^n|$

Επίσης έχουμε: $y^{n,i} - z^{n,i} = y^n - z^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij}[f(t^{n,j}, y^{n,j}) - f(t^{n,j}, z^{n,j})]$

$$\Rightarrow |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + h\sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|\, \underbrace{|f(t^{n,j}, y^{n,j}) - f(t^{n,j}, z^{n,j})|}_{\le L|y^{n,j} - z^{n,j}|}$$

$$\Rightarrow |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + h\underbrace{\left(L\sum_{j=1}^{q}|a_{ij}|\right)}_{\le \gamma} \max_{1\le l\le q} |y^{n,l} - z^{n,l}|$$

$$\gamma = L\max_{1\le i\le q}\sum_{j=1}^{q}|a_{ij}|$$

$$\Rightarrow |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + \gamma h \max_{1\le l\le q} |y^{n,l} - z^{n,l}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\max_{1\le i\le q} |y^{n,i} - z^{n,i}|} \le |y^n - z^n| + \gamma h \max_{1\le l\le q} |y^{n,l} - z^{n,l}|$$

$$\Rightarrow \max_{1\le l\le q} |y^{n,l} - z^{n,l}| \le \frac{1}{1-\gamma h}|y^n - z^n| \quad \text{Για } h \le h_0 < \frac{1}{\gamma}, \quad \frac{1}{1-\gamma h} \le \frac{1}{1-\gamma h_0} = C'$$

$$\Rightarrow \max_{1\le l\le q} |y^{n,l} - z^{n,l}| \le C'|y^n - z^n|$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} |y^{n+1} - z^{n+1}| \le \Big(1 + h\underbrace{\Big(C' L \sum_{i=1}^{q}|b_i|\Big)}_{C_0}\Big)|y^n - z^n| + \underbrace{\max_{0\le l\le N-1} |\rho^l|}_{\|K}$$

$$\Rightarrow \max_{0\le n\le N} |y^n - z^n| \le e^{C'(b-a)}|y^0 - z^0| + \frac{e^{C(b-a)} - 1}{h} \max_{0\le n\le N-1} |\rho^n|$$

Λήμμα 2.1.

Τάξη ακρίβειας και σύγκλιση μεθόδων RK

$$y' = f(t,y), \quad a \le t \le b,$$
$$y(a) = y_0$$

Μέθοδος του Euler: ~~...~~ $y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n)$

Τοπικό σφάλμα: $\delta^n = [y(t^n) + hf(t^n, y(t^n))] - y(t^{n+1})$

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1q} & c_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} & c_q \\ \hline b_1 & \cdots & b_q & \end{array}$$

$$y^{n,i} = y^n + \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \quad i = 1, \dots, q,$$
$$y^{n+1} = y^n + \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i})$$

$$\begin{cases} y^{n,i} = y(t^n) + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), & i=1,\dots,q \\ \delta^n := \left[y(t^n) + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \right] - y(t^{n+1}) \end{cases}$$

δ^n : τοπικό σφάλμα

-//- διακριτοποίησης

σφάλμα συνέπειας

Τάξη ακρίβειας της μεθόδου RK:

(Υπόθεση f και y αρκετά ομαλά)

Ο μέγιστος ακέραιος $p \geq 1$ τ.ω.

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} |\delta^n| \leq \tilde{C}_1 h^{p+1}$$

$\uparrow$ εξαρτάται από τη λύση y.

Ανεξάρτητη του h

• Πώς βρίσκουμε το p;

(Γενικά δύσκολο)

• Πώς εκτιμούμε το (ολικό) σφάλμα $|y(t^n) - y^n|$.

29/11/2011

Τάξη ακρίβειας και σύγκλιση μεθόδων RK

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \leq t \leq b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

y αρκετά ομαλή

f -//- -//-

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1q} & \tau_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & \dots & b_q & \end{array}$$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$,

$t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

$t^{n,i} = t^n + \tau_i h$

$$(+)\begin{cases} y^{n,i} = y^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), & i=1,\dots,q \\ y^{n+1} = y^n + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{cases}$$

$$(++)\begin{cases} \tilde{y}^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, \tilde{y}^{n,j}), & i=1,\dots,q, \\ \delta^n := [y(t^n) + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, \tilde{y}^{n,i})] - y(t^{n+1}) \end{cases}$$

δ^n: τοπικό σφάλμα

-"- -"- διακριτοποίησης

σφάλμα συνέπειας

Ο μεγαλύτερος ακέραιος p τ.ω.

$$(*) \quad \max_{0\le n\le N-1} |\delta^n| \le \tilde{C}_1 h^{p+1}$$

με $\tilde{C}_1$ ανεξ. του h, λέγεται <u>τάξη ακρίβειας</u> της μεθόδου

<u>Θεώρημα</u> (Εκτίμηση του ολικού σφάλματος)

Έστω ότι ισχύει η (*) για το πρόβλημα. Έστω το h είναι αρκετά μικρό ($h\le h_0$, με h_0 τ.ω. $h_0\gamma<1$). Τότε ισχύει

$$\max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le \underbrace{\frac{\tilde{C}_1}{C'}[e^{C'(b-a)} - 1]}_{C_2} h^p$$ ~~με το~~

με τον συμβολισμό της πρότασης 3.2 (της προηγούμενης πρότασης

<u>Απόδειξη:</u>

Χρησιμοποιούμε την προηγούμενη <u>Πρόταση</u>

Γράφουμε τη (++) στη μορφή

$$\begin{cases} \tilde{y}^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, \tilde{y}^{n,j}), & i=1,\dots,q, \\ y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, \tilde{y}^{n,i}) - \delta^n \end{cases}$$

Με το συμβολισμό της προηγούμενης πρότασης:

$$z^n = y(t^n), \quad p^n = -\delta^n$$

Επομένως έχουμε

$$\max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le C_1 \, |\cancel{y(a)} - y^0| + \frac{C_2}{h} \max_{0\le n\le N-1} |\delta^n|$$

$$\underset{(*)}{\le} \frac{C_2}{h} \tilde{C} h^{\cancel{p+1}} = \tilde{C} C_2 \cdot h^p$$

$p \ge 1$: Η μέθοδος λέγεται <u>συνεπής</u>.

Άσκηση: Η μέθοδος είναι συνεπής αν και μόνο αν $\boxed{b_1 + b_2 + \ldots + b_q = 1}$

1/12/2011

<u>Παραδείγματα</u>

<u>1. Η άμεση μέθοδος του μέσου</u>

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 1 & \end{array}$$

$$y^{n,1} = y(t^n) \quad (\tau_1 = 0 = \alpha_{11})$$

$$y^{n,2} = y(t^n) + \frac{1}{2} h f(\underset{t^n(\tau_1 h)}{t^{n,1}}, \underset{y(t^n)}{y^{n,1}})$$

$$\delta^n = y(t^n) + h f(t^{n,2}, y^{n,2}) - y(t^{n+1})$$

$$= y(t^n) + h f\left(t^n + \frac{h}{2}, y(t^n) + \frac{1}{2} h f(t^n, y(t^n))\right) - y(t^{n+1})$$

$$= \cancel{y(t^n)} + h \Big[f(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} f_t(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} f(t^n, y(t^n)) f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^2) \Big]$$

$$- \Big[\cancel{y(t^n)} + h y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(t^n) + O(h^3) \Big]$$

$$= h \big[\underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{y'(t^n)} - y'(t^n) \big] + \frac{h^2}{2} \underbrace{\big[f_t(t^n, y(t^n)) + f_y(t^n, y(t^n)) y'(t^n) \big]}_{0} + O(h^3)$$

$$y'(t) = f(t, y(t))$$
$$\Rightarrow y''(t) = f_t'(t, y(t)) + f_y(t, y(t)) \cdot y'(t)$$

$$\{ (f(\phi(x)))' = f'(\phi(x)) \cdot \phi'(x) \}$$

$$\Rightarrow \delta^n = O(h^3) \Rightarrow \boxed{p \geq 2}$$

2. $\begin{cases} y'(t) = t^2, & 0 < t \leq 1, \\ y(0) = 0 \end{cases}$

<u>Λύση:</u> $y(t) = \frac{1}{3} t^3$

$$\delta^n = y(t^n) + h f(t^{n,\frac{1}{2}}) - y(t^{n+1}) = \frac{1}{3}(t^n)^3 + h(t^n + \frac{h}{2})^2 - \frac{1}{3}(t^n + h)^3$$

$$= \frac{1}{3}\cancel{(t^n)^3} + \cancel{h(t^n)^2} + \cancel{t^n h^2} + \frac{h^3}{4} - \frac{1}{3}[\cancel{(t^n)^3} + \cancel{3(t^n)^2 h} + \cancel{3t^n h^2} + h^3]$$

$$\Rightarrow \delta^n = \frac{h^3}{4} - \frac{h^3}{3} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) h^3 = -\frac{1}{12} h^3$$

$$\Rightarrow |\delta^n| \geq \frac{1}{12} h^3 \Rightarrow \boxed{p \leq 2}$$

<u>Συνολικά:</u> $\boxed{p = 2}$

6/12/2011

3. <u>Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler</u>

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$y^{n,1} = y(t^n) + h f(t^{n+1}, y^{n,1})$$

$$\delta^n = y(t^n) + \underbrace{h f(t^{n+1}, y^{n,1})}_{} - y(t^{n+1})$$

$$\| $$

$$f(\boxed{t^n} + h, y(\boxed{t^n}) + h f(t^{n+1}, y^{n,1}))$$

$$\underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{y'(t^n)} + O(h)$$

$= y(t^n) + hy'(t^n) + O(h^2) - y(t^{n+1})$

$= \cancel{y(t^n)} + \cancel{hy'(t^n)} + O(h^2) - [\cancel{y(t^n)} + \cancel{hy'(t^n)} + O(h^2)]$

$= O(h^2) \Rightarrow \boxed{p \geq 1}$

$$\begin{cases} y'(t) = t, & 0 \leq t \leq 1, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$y(t) = \frac{1}{2}t^2$

Ίσος $\delta^n = y(t^n) + h \overset{f(t^{n+1}, f^{n,1})}{t^{n+1}} - y(t^{n+1})$

$= \frac{1}{2}(t^n)^2 - h(t^n + h) - \frac{1}{2}(t^n + h)^2$

$= \frac{1}{2}\cancel{(t^n)^2} + \cancel{ht^n} + h^2 - \frac{1}{2}\cancel{(t^n)^2} - \cancel{t^n h} - \frac{1}{2}h^2$

$= h^2 - \frac{1}{2}h^2 = \frac{1}{2}h^2$

$|\delta^n| \geq \frac{1}{2}h^2 \Rightarrow \boxed{p \leq 1}$

Συνολικά $\boxed{p = 1}$

4. (Πεπλεγμένη) μέθοδος του μέσου

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

$f^{n,1} = y(t^n) + \frac{h}{2} f(t^n + \frac{h}{2}, f^{n,1})$

$\delta^n = y(t^n) + h \boxed{f(t^n + \frac{h}{2}, f^{n,1})} - y(t^{n+1}) \overset{*}{=}$

$f(t^n + \frac{h}{2}, f^{n,1}) = f(t^n + \frac{h}{2}, y(t^n) + \frac{h}{2} f(t^n + \frac{h}{2}, f^{n,1}))$

$= f(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} f_t(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} \underbrace{f(t^n + \frac{h}{2}, f^{n,1})}_{f(t^n, y(t^n)) + O(h)} f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^2)$

$= f(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2}[f_t(t^n, y(t^n)) + f_y(t^n, y(t^n)) \cdot f(t^n, y(t^n))] + O(h^2)$

$$\stackrel{*}{=} \cancel{y(t^n)} + h f(t^n, \overset{\cancel{y'(t^n)}}{\cancel{y(t^n)}}) + \frac{h^2}{2}\left[f_t(t^n, y(t^n)) + f_y(t^n, y(t^n))\cdot f(t^n, y(t^n))\right]$$
$$+ O(h^3) - \left[\cancel{y(t^n)} + \cancel{h y'(t^n)} + \frac{h^2}{2} y''(t^n) + O(h^3)\right]$$

$$= \frac{h^2}{2}\underbrace{\left[f_t(t^n, y(t^n)) + f_y(t^n, y(t^n))\cdot y'(t^n) - y''(t^n)\right]}_{\overset{!!}{0}\ ;} + O(h^3) = O(h^3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)) \\ \Rightarrow y''(t) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t))\cdot y'(t) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{p \geq 2}$$

$$\begin{cases} y'(t) = t^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{t^3}{3}$$

$$\delta^n = y(t^n) + h\left(t^n + \frac{h}{2}\right)^2 - y(t^{n+1})$$

$$= \frac{(t^n)^3}{3} + h\left(t^n + \frac{h}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}(t^n + h)^3$$

$$= \dots = -\frac{1}{12} h^3$$

$$\Rightarrow |\delta^n| \geq \frac{1}{12} h^3 \Rightarrow \boxed{p \leq 2}$$

<u>Συνολικά:</u> $p = 2$

Γενική περίπτωση

1η Περίπτωση: Άμεσες μέθοδοι

Τότε η μέθοδος μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\boxed{y^{n+1} = y^n + h\,\Phi(t^n, y^n; h)}$$

με ϕ που εξαρτάται από την f.

$$y^{n,i} = y^n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \quad i = 1, \dots, q$$

$$y^{n+1} = y^n + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, \underset{\substack{\uparrow \\ y^n,\, h}}{y^{n,i}})$$

$$= \dots = y^n + h\,\Phi(t^n, y^n; h)$$

Τοπικό σφάλμα:

$$\delta^n = y(t^n) + h\,\Phi(t^n, y(t^n); h) - y(t^{n+1})$$

Taylor και υψηλή p

2η Περίπτωση: Πεπλεγμένες μέθοδοι

$$(*) \quad y^{n,i} = y^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \quad i = 1, \dots, q,$$

$$y^{n+1} = y^n + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i})$$

Θεωρητικά: Λύνοντας το $(*)$ ως προς $y^{n,1}, \dots, y^{n,q}$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη σχέση, γράφουμε τη μέθοδο στη μορφή:

$$y^{n+1} = y^n + h\,\Phi(t^n, y^n; h)$$

Πρακτικά: Αυτό είναι γενικά αδύνατο.

Δεν χρειάζεται να βρούμε το Φ σε κλειστή μορφή. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρούμε ανάπτυγμα του ϕ σε δυνάμεις του h.
Οι πράξεις διευκολύνονται με χρήση δένδρα του Butcher και ~~πακέτων~~ συμβολικών υπολογισμών.

Θεώρημα: (Απλοποιημένες ικανές συνθήκες για να έχει μια μέθοδος RK τάξη ακρίβειας τουλάχιστον p)

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ακέραιοι p, s, r ≥ 0 τω.

(1). $\sum_{i=1}^{q} b_i \tau_i^k = \frac{1}{k+1}, \quad k=0,\dots,p-1$

$$\int_0^1 \varphi(\tau)d\tau \approx \sum_{i=1}^{q} b_i \varphi(\tau_i)$$

$$\varphi(\tau) = \tau^k \qquad \frac{1}{k+1} \approx \sum_{i=1}^{q} b_i \tau_i^k$$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t) \\ y^{n+1} = y^n + h \underbrace{\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i})}_{\approx \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t)dt} \end{cases}$$

$$\int_0^{\tau_i} \varphi(\tau)d\tau \approx \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\varphi(\tau_j)$$

(2). $\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\tau_j^k = \frac{\tau_i^{k+1}}{k+1}, \quad 1 \le i \le q, \quad k=0,\dots,s-1$

• $\boxed{\sum_{i=1}^{q} b_i \tau_i^k a_{ij} = \frac{b_j(1-\tau_j^{k+1})}{k+1}, \quad 1 \le j \le q, \quad k=0,\dots,r-1}$

• $p \le r+s+1$ και $p \le 2s+2$

Τότε η μέθοδος έχει τάξη ακρίβειας τουλάχιστον p.

Πόρισμα: (Butcher – Crouzeix)

α) Αν ισχύει η (1) για κάποιο p και η (2) για $s=p-1$, τότε η τάξη είναι p.

β) Έστω q' το πλήθος των τ_i, $1 \le i \le q$, που είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Αν ισχύει η (1) και οι (2) για $s=q'$

τότε η τάξη είναι p.

Ιδιαίτερα ακρίβεια: $q' = q$

γ) Υπάρχει μία μόνο μέθοδος με q στάδια και $p=2q$.

Πώς τη βρίσκουμε;

$$\sum_{i=1}^{q} b_i c_i^k = \frac{1}{k+1}, \quad k=0,\dots,2q-1$$

(Τα b_i και c_i είναι τα βάρη και οι κόμβοι, αντίστοιχα, του τύπου ολοκλήρωσης του Gauss με $w(x)=1$)

$$\sum_{j=1}^{q} a_{ij} c_j^k = \frac{c_i^{k+1}}{k+1}, \quad k=0,\dots,q-1$$

Γραμμικό σύστημα με αγνώστους $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iq}$

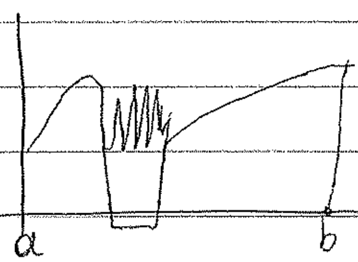
Αυτό το σύστημα το λύνουμε για κάθε i και βρίσκουμε όλα τα a_{ij}.

Αυτές οι μέθοδοι λέγονται μέθοδοι των Runge-Kutta-Gauss-Legendre (Butcher)

8/12/2011

Εκτίμηση τοπικού σφάλματος

Αυτόματη μεταβολή βήματος



Χρησιμοποιούμε μεγάλο βήμα εκεί που η λύση μεταβάλλεται αργά και μικρό εκεί που μεταβάλλεται γρήγορα.

Μεταβλητό βήμα

$$t^n \xrightarrow{h_n} t^{n+1}$$

· Προβλήματα στην ανάλυση:

Υλοποίηση (χωρίς πρόβλημα)

$$y^n \xrightarrow[h_n]{} y^{n+1}$$

Τάξη ακρίβειας: όπως και στον ομοιόμορφο διαμερισμό

Ευστάθεια + εκτίμηση σφάλματος: Απαιτείται μια γενίκευση της απόδειξης που είδαμε στην περίπτωση ομοιόμορφου διαμερισμού

Πώς διαπιστώνουμε πού έχουμε ταχεία ή βραδεία μεταβολή της λύσης;

Θεωρητικά: Είναι δύσκολο να εκτιμήσουμε το $C(y)$, αλλά ακόμα και όταν αυτό είναι εφικτό οδηγούμαστε σε φράγματα που υπερεκτιμούν πολύ το τοπικό σφάλμα.

$|\delta^n| \le C(y) h_n^{p+1}$

Πρακτικά: (Άμεση μέθοδος)

$$y^{n+1} = y^n + h\phi(t^n, y^n; h)$$

τάξη $= p$.

Βοηθητική μέθοδος:

$$\tilde{y}^{n+1} = y^n + h\,\phi_1(t^n, y^n; h)$$

$\boxed{\text{τάξη} = s > p}$

Τοπικά σφάλματα:

$$\delta^n = y(t^n) + h\phi(t^n, y(t^n); h) - y(t^{n+1}) = O(h_n^{p+1})$$

$$\tilde{\delta}^n = y(t^n) + h\,\phi_1(t^n, y(t^n); h) - y(t^{n+1}) = O(h_n^{s+1})$$

$$\delta^n = \underbrace{[y(t^n) + h\phi(t^n, y(t^n); h)] - [y(t^n) + h\,\phi_1(t^n, y(t^n); h)] + O(h_n^{s+1})}_{O(h_n^{p+1})}$$

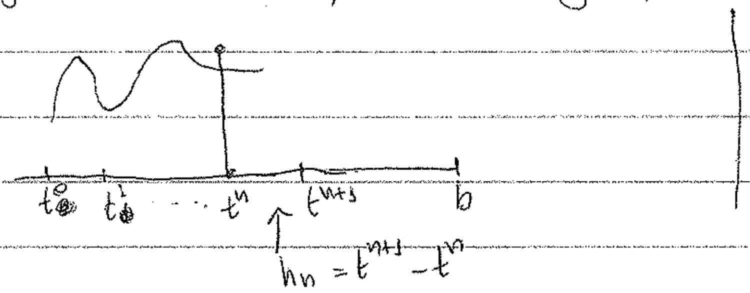
$$\delta^n \approx [y(t^n) + h\,\phi_1(t^n, y(t^n); h] - [y(t^n) + h\,\phi_1(t^n, y(t^n); h)]$$

Στόχος: Να προσδιορίσω προσεγγίσεις y^n των $y(t^n)$ με κατά το δυνατόν μικρό πλήθος βημάτων) τ.ω.

$$|y(t^n)-y^n| \approx \varepsilon \quad \text{με προκαθορισμένο } \varepsilon.$$

Έστω ότι υπολογίσαμε προσεγγίσεις $y^1,\dots,y^n$ στα $t^1,\dots,t^n$, με την ακρίβεια που θέλαμε.

Πώς θα υπολογίσουμε το t^{n+1}; (και το y^{n+1})



Έχουμε $y^n \approx y(t^n)$

$h_n := h_{n-1}$, $\quad t^{n+1} := t^n + h_n$

$$\delta^n \approx \underbrace{[y^n + h\,\phi(t^n,y^n;h)]}_{y^{n+1}} - \underbrace{[y^n + h\,\phi_1(t^n,y^n;h)]}_{\tilde{y}^{n+1}}$$

I. $\frac{1}{10}\varepsilon h_n \le |y^{n+1}-\tilde{y}^{n+1}| \le \varepsilon h_n$

Το σφάλμα δεν είναι ούτε πολύ μεγάλο ούτε πολύ μικρό.

$t^{n+1} := t^n + h_n$ και συνεχίζουμε με προσέγγιση το y^{n+1}.

II. $|y^{n+1}-\tilde{y}^{n+1}| > \varepsilon h_n$

Τότε το σφάλμα είναι μεγάλο.

Επιλέγουμε μικρότερο βήμα, π.χ. $h_n := \frac{h_n}{2}$

Πήγαινε στη σχέση (*) με το νέο h_n

t^n:

$$(*)\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h_n\,\Phi(t^n,y^n;h_n) \\ \tilde{y}^{n+1} = y^n + h_n\,\Phi_1(t^n,y^n;h^n) \end{cases}$$

III $|y^{n+1} - \tilde{y}^{n+1}| < \frac{1}{10} \varepsilon h_n$

Το σφάλμα είναι υπερβολικά μικρό. Μπορούμε να μεγαλώσουμε το βήμα, π.χ. $h_n := 2h_n$

Αν τότε με το νέο h_n ισχύει η II, τότε δουλεύουμε με το $\frac{h_n}{2}$ και συνεχίζουμε

Κόστος;

13/12/2011

Αυτόματη μεταβολή βήματος

$y^n \mapsto y^{n+1}$ τάξης p
$y^n \mapsto \tilde{y}^{n+1}$ -//- $s > p$

I. $\frac{1}{10} \varepsilon h_n \leq |\tilde{y}^{n+1} - y^{n+1}| \leq \varepsilon \cdot h_n$
αποδεχόμαστε το h_n

II. $|\tilde{y}^{n+1} - y^{n+1}| > \varepsilon \cdot h_n$
$h_n := \frac{h_n}{2}$

III $|\tilde{y}^{n+1} - y^{n+1}| < \frac{1}{10} \varepsilon \cdot h_n$
$h_n := 2h_n$

- Το ε δεν πρέπει να επιλέγεται υπερβολικά μικρό. Γιατί αυτό μπορεί να οδηγήσει σε υπερβολικά μικρό κατάλληλο βήμα h_n.
  $t^{n+1} = t^n + h_n$
  Σε τέτοιες περιπτώσεις είναι δυνατόν να προκύψει $t^{n+1} = t^n$.

Κόστος υπολογισμών

Στην πράξη δουλεύουμε με ζεύγη (αμέσων) μεθόδων με τα ίδια A και c και διαφορετικά b (και με διαφορετική τάξη ακρίβειας)

$$\begin{array}{c|c} A & c \\ \hline b & \\ \hline \tilde{b} & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} A & c \\ \hline b & \end{array} \longrightarrow \text{τάξη } p$$

$$\begin{array}{c|c} A & c \\ \hline \tilde{b} & \end{array} \longrightarrow \text{τάξη } s > p$$

$$y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{i} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \quad i = 1, \dots, q$$

(τα ίδια και για τις δύο μεθόδους)

$$y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i \boxed{f(t^{n,i}, y^{n,i})}$$

$$\tilde{y}^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} \tilde{b}_i \boxed{f(t^{n,i}, y^{n,i})}$$

Το επιπλέον κόστος είναι ελάχιστο

Έχουμε

$$\boxed{\tilde{y}^{n+1} - y^{n+1} = h \sum_{i=1}^{q} (\tilde{b}_i - b_i) f(t^{n,i}, y^{n,i})}$$

Παράδειγμα

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \end{array} \qquad \begin{array}{l} p = 2 \\ s = 3 \end{array}$$

Απόλυτη ευστάθεια

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & t \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y(t) = e^{\lambda t}$$

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & \cdots & b_q & \end{array}$$

$h > 0$

$y^0 = 1$

$y^n \longmapsto y^{n+1}$:

$$(*) \quad y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \lambda y^{n,j} = y^n + h\lambda \sum_{j=1}^{q} a_{ij} y^{n,j}, \quad i = 1, \dots, q$$

$$(**) \quad y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i \lambda y^{n,i} = y^n + h\lambda \sum_{i=1}^{q} b_i \boxed{y^{n,i}}$$

$$(*) \Leftrightarrow y^{n,i} - h\lambda \sum_{j=1}^{q} a_{ij} y^{n,j} = y^n, \quad i = 1, \dots, q,$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} - h\lambda A \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^n \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = y^n \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{e}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(I - \lambda h A)}_{\substack{\text{αναστρέψιμος} \\ \text{(υπόθεση)}}} \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = y^n e$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = y^n (I - \lambda h A)^{-1} e$$

Άρα, αντικαθιστώντας στη (**), έχουμε

$$y^{n+1} = y^n + h\lambda b^T \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}$$

$$= y^n + \lambda h y^n b^T (I - \lambda h A)^{-1} e$$

$$x^T y = (x_1 \dots x_q) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_q y_q = (x, y)$$

$$\Rightarrow y^{n+1} = [1 + \underbrace{\lambda h}_{z} b^T (I - \underbrace{\lambda h}_{z} A)^{-1} e] y^n$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση r,

$$r(z) := 1 + z b^T (I - zA)^{-1} e$$

και έχουμε

$$\boxed{y^{n+1} = r(\lambda h)\, y^n} \Rightarrow |y^{n+1}| = |r(\lambda h)|\,|y^n|$$

$$\Rightarrow |y^n| = |r(\lambda h)|^n \underbrace{|y^0|}_{=1}$$

$$\Rightarrow |y^n| \le C \Leftrightarrow |r(\lambda h)| \le 1$$

Περιοχή απόλυτης ευστάθειας της μεθόδου

$$S = \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| \le 1 \}$$

$I - zA$ αντιστρέψιμος;

$$\underline{I - zA} = \underline{z\left(\frac{1}{z} I - A\right)}$$

$I - zA$ αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow A - \frac{1}{z} I$ αντιστρέψιμος

$$\Leftrightarrow \left(\left(A - \frac{1}{z} I\right) x \Leftrightarrow x = 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(Ax = \frac{1}{z} x \Leftrightarrow x = 0 \right) \Leftrightarrow \frac{1}{z} \text{ όχι ιδιοτιμή του } A$$

$$y^{n+1} = r(\lambda h)\, y^n,$$
$$r(z) = 1 + z b^T (I - zA)^{-1} e$$

Τι μορφή έχει το r;

$$(I - zA)^{-1} e = w \Leftrightarrow$$
$$(I - zA)\, w = e$$

Λύνοντας με τον κανόνα του Cramer, βλέπουμε ότι τα w_i είναι ρητές συναρτήσεις με βαθμό παρανομαστή $\leq q$ και βαθμό αριθμητή το πολύ $q-1$.

Το r είναι ρητή συνάρτηση με αριθμητή και παρανομαστή πολυώνυμα βαθμού το πολύ q.

Τάξη ακρίβειας;

Το r είναι ανεξάρτητο του c!!
Σε κάθε μέθοδο RK αντιστοιχεί μια ρητή συνάρτηση r.
Σε διαφορετικές μεθόδους RK μπορεί να αντιστοιχεί το ίδιο r!

Τοπικό σφάλμα:

$$\delta^n = r(\lambda h) y(t^n) - y(t^{n+1}) = [r(\lambda h) - e^{\lambda h}]\, y(t^n)$$

$$y(t) = e^{\lambda t}$$
$$y(t^{n+1}) = e^{\lambda t^{n+1}} = e^{\lambda (t^n + h)} = \underbrace{e^{\lambda t^n}}_{= y(t^n)} e^{\lambda h} = e^{\lambda h} y(t^n)$$

Συμπέρασμα:

$$|\delta^n| = O(h^{p+1}) \Leftrightarrow |r(\lambda h) - e^{\lambda h}| = O(h^{p+1})$$
$$\Leftrightarrow (+)\ \boxed{|e^z - r(z)| = O(|z|^{p+1})} \quad \text{για } z \to 0$$

Η (+) είναι αναγκαία για να έχει η μέθοδος τάξη ακρίβειας p.

Παραδείγματα:

Euler $\longrightarrow$ $r_1(z) = 1 + z$

Πεπλ. Euler $\longrightarrow$ $r_2(z) = \dfrac{1}{1-z}$

Τραπεζίου: $r_3(z) = \dfrac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}$

(πεπλ. μέσου)

$\rightsquigarrow$ A ευσταθείς!

Άμεσοι μέθοδοι:

$r(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_q z^q$

Έστω ότι η μέθοδος έχει τάξη ακρίβειας $p \geq 1$.

$$e^z - r(z) = O(|z|^{p+1}) \quad z \to 0$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$e^z - r(z) = (1 - c_0) + (c_1 - 1) z + \left(c_2 - \frac{1}{2!}\right) z^2 + \cdots + \left(c_q - \frac{1}{q!}\right) z^q + O(|z|^{q+1})$$

$$e^z - r(z) = O(|z|^{p+1}) \Leftrightarrow c_i = \frac{1}{i!}, \; i = 0, \ldots, p.$$

Τάξη ακρίβειας: $p \leq q$

$$r(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^p}{p!} + c_{p+1} z^{p+1} + \cdots + c_q z^q$$

$p = q$: $r(z) = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \cdots + \dfrac{z^q}{q!}$

(Τέτοιες μέθοδοι υπάρχουν μόνο για $q = 1, 2, 3, 4$).

$p \geq 1 \Rightarrow |r(z)| \to \infty, \; z \to -\infty \quad z \in \mathbb{R}$

Δεν είναι A-ευσταθής!

B- ευστάθεια

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$y \in \mathbb{R}^m$

Υπόθεση:

$\forall\, t \in [a,b] \quad \forall\, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$

$$\left(f(t,x) - f(t,\tilde{x}),\ x - \tilde{x}\right) \le 0$$

$$\begin{cases} z' = f(t,z), & a \le t \le b, \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

Ιδιότητα λύσεων

$\|y(t) - z(t)\|$ φθίνουσα συνάρτηση του t

$y^n \to y^{n+1}$

$z^n \to z^{n+1}$

Η μέθοδος λέγεται B-ευσταθής, αν $\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \le \|y^n - z^n\|$

A-ευστάθεια: Dahlquist

B-ευστάθεια: Butcher

Crouzeix

- B- ευστάθεια $\Rightarrow$ A- ευστάθεια
- A- ευστάθεια $\not\Rightarrow$ B- ευστάθεια.

Παράδειγμα: Η μέθοδος του τραπεζίου είναι A-ευσταθής αλλά δεν είναι B-ευσταθής.

Ορισμός (αλγεβρική ευστάθεια)

Μία μέθοδος RK λέγεται αλγεβρικά ευσταθής, αν

$b_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, q.$

Ο $q \times q$ πίνακας με στοιχεία m_{ij},

$m_{ij} := b_i a_{ij} + b_j a_{ji} - b_i b_j, \quad i, j = 1, \ldots, q,$

είναι μη αρνητικά ορισμένος, δηλ.

$\forall x \in \mathbb{R}^q \quad \sum_{i,j=1}^{q} m_{ij} x_i x_j \geq 0$

$(Mx, x) \geq 0$

Αλγεβρική ευστάθεια $\Rightarrow$ B-ευστάθεια

Αν τα $c_1, \ldots, c_q$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους ισχύει και το αντίστροφο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

1/12/2011

3.12

$$
\begin{array}{ccc|c}
a_{11} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\
\vdots & & & \vdots \\
a_{q1} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\
\hline
b_1 & \cdots & b_q &
\end{array}
$$

ΝΔΟ: $\underbrace{\text{Μέθοδος συνεπής}}_{p \geq 1} \iff b_1 + \cdots + b_q = 1$

$$
\begin{cases} y' = f(t, y), & a < t < b \\ y(a) = y_0 \end{cases}
$$

$$
f(t^{n,i}, y^{n,i}) = f\Big(t^n + \tau_i h,\; y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j})\Big) = f(t^n, y(t^n)) + O(h)
$$

$$
\begin{cases} y^{n,i} = y(t^n) + h\displaystyle\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, f(t^{n,j}, y^{n,j}), & i = 1, \dots, q, \\ \delta^n = y(t^n) + h\displaystyle\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) - y(t^{n+1}) \end{cases}
$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$\delta^n = O(h^2) \iff b_1 + \cdots + b_q = 1$$

Taylor:

$$
\delta^n = \cancel{y(t^n)} + h\sum_{i=1}^{q} b_i \big[f(t^n, y(t^n)) + O(h)\big] - \big[\cancel{y(t^n)} + h y'(t^n) + O(h^2)\big] =
$$

$$
= h\sum_{i=1}^{q} b_i \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{= y'(t^n)} - h y'(t^n) + O(h^2) = h\Big[\sum_{i=1}^{q} b_i - 1\Big]\underbrace{y'(t^n)}_{\neq 0} + O(h^2)
$$

$$
\Rightarrow \Big[\delta^n = O(h^2) \iff \sum_{i=1}^{q} b_i = 1\Big]
$$

3.13

$$
\begin{cases} y'(t) = 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ y(0) = 0 \end{cases}
$$

$\boxed{\text{Λύση } y(t) = t}$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{1}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

$y^N \to 1,\ N \to \infty \Rightarrow p \geq 1$ (μέθοδος συνεπής)

Απόδειξη:

$$\begin{array}{c|c} A & c \\ \hline b^T & \end{array}$$

$f(\,)=y'(t)$

$$y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \cdot 1$$

$$y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i \cdot 1 = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i$$

$$\Longrightarrow \quad y^n = y^0 + nh \sum_{i=1}^{q} b_i, \quad n = 0, \dots, N$$

τετρ. επαγωγή

$$a_n = a_{n-1} + K = a_{n-2} + \underbrace{K + K}_{2K} = a_{n-2} + 2K$$

$(y^0 = 0$ άρα$)$ $\quad y^n = N \cdot h \sum_{i=1}^{q} b_i = \sum_{i=1}^{q} b_i$

$$(y^n \to 1,\ N \to \infty) \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{q} b_i \to 1,\ N \to \infty\right) \Leftrightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{q} b_i = 1}$$

$a^{n+1} = a^n + K, \quad n = 0, \dots$

Ισχυρισμός: $a_n = a_0 + nK, \quad n \in \mathbb{N}_0$

Επαγωγή: $n=0$: $a_0 = a_0$ ✓

$n \to n+1$: $a_{n+1} = a_n + K = a_0 + nK + K = a_0 + (n+1)K$

υπ. επαγ.

3.14

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1q} & c_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qq} & c_q \\ \hline b_1 & \dots & b_q & \end{array}$$

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & a \leq t \leq b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

f, y ομαλές

$$\Leftrightarrow \overset{(*)}{\xi^{n,i}} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, \xi^{n,j}), \quad i=1,\dots,q$$

NΔO: 1) $\max_{n,i} |y(t^{n,i}) - \xi^{n,i}| \leq C h$

2) $\max_{n} |y(t^{n,i}) - \xi^{n,i}| \leq C h^2 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{q} a_{ij} = \tau_i$

Απόδειξη:

$$\xi^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^n + \tau_i h, y(t^n) + \overset{(*)}{O(h)})$$

$$= y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{"y'(t^n)"} + O(h^2)$$

$$\xi^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} y'(t^n) + O(h^2) =$$

$$\left\{ y(t^{n,i}) = y(t^n + \tau_i h) = y(t^n) + \tau_i h y'(t^n) + O(h^2) \right\}$$

$$= y(t^{n,i}) - \tau_i h y'(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} y'(t^n) + O(h^2)$$

$$\Leftrightarrow \xi^{n,i} - y(t^{n,i}) = h\left[\sum_{j=1}^{q} a_{ij} - \tau_i\right] y'(t^n) + O(h^2)$$

$$A_h \leq C_1 h + C_2 h^2 \underset{h \leq b-a}{\leq} C_1 h + C_2 (b-a) h \leq \tilde{C} h$$

3.15 8/12/2011

$q=3$

*	*	*	*
*	*	*	*
*	*	*	*
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	

είναι συνεπής;

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3+2+1}{6}=1$$

$\Rightarrow p \geq 1 \Leftrightarrow$ μέθοδος ανεπής

$\uparrow$

Άσκηση 3.2

3.2

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline & 1 \end{array}$$

ΝΔΟ: $p=1$

$p \geq 1 \rightsquigarrow b=1$

$p<2 \rightsquigarrow p \leq 2q$

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline & 1 \end{array} \neq \begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array} \Rightarrow p \leq 1 \Rightarrow$$

$p=2$

$\Rightarrow p=1$

$$y^{n,1}=y(t^n)+\frac{1}{3}h f\left(t^n+\frac{h}{3}, y^{n,1}\right)$$

$$\delta^n = y(t^n)+h f\left(t^n+\frac{h}{3}, y^{n,1}\right)-y(t^{n+1})$$

$$= y(t^n)+h f\left(t^n+\frac{h}{3}, \boxed{y(t^n)}+\frac{h}{3} f\left(t^n+\frac{h}{3}, y^{n,1}\right)\right)-y(t^{n+1})$$

$$\cancel{= y(t^n)+h y'(t^n)}$$

$$= \cancel{y(t^n)}+h[\underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{y'(t^n)}+O(h)]-[\cancel{y(t^n)}+\cancel{h y'(t^n)}+O(h^2)]$$

$$= O(h^2) \Rightarrow \boxed{p \geq 1}$$

$$\begin{cases} y'(t) = 2t, & 0 \le t \le 1, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$y(t) = t^2$$

$$\delta^n = (t^n)^2 + h2\left(t^n + \frac{h}{3}\right) - (t^n + h)^2 = -\frac{1}{3}h^2$$

$$\Rightarrow |\delta^n| \ge \underset{>0}{\underset{\uparrow}{\frac{1}{3}}} h^2 \Rightarrow \boxed{p \le 1}$$

Συνολικά: $\boxed{p=1}$

3.3

$q = 2$ άμεσες μέθοδοι

↳ γνήσια κάτω τριγωνικός

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & \tau_2 \\ \hline b_1 & b_2 & \end{array}$$

Να βρεθούν όλες οι μέθοδοι με $\boxed{p=2}$

$$y^{n,1} = y^n$$

$$y^{n,2} = y^n + a_{21} h f(\underset{t^{n,1}}{t^n}, \underset{y^{n,1}}{y^n})$$

$$y^{n+1} = y^n + b_1 h f(t^n, y^n) + b_2 h f(t^n + \tau_2 h, y^{n,2})$$

$$= y^n + b_1 h f(t^n, y^n) + b_2 h f(t^n + \tau_2 h, y^n + a_{21} h f(t^n, y^n))$$

Τοπικό σφάλμα:

$$\delta^n = y(t^n) + b_1 h \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{\substack{\shortparallel \\ y'(t^n)}} + b_2 h f(\boxed{t^n} + \tau_2 h, \boxed{y(t^n)} + a_{21} \overbrace{f(t^n, y(t^n))}^{y'(t^n)}) - y(t^{n+1})$$

$$= \cancel{y(t^n)} + b_1 h y'(t^n) + b_2 h [\overbrace{f(t^n, y(t^n))}^{=y'(t^n)} + c_2 h f_t(t^n, y(t^n)) + a_{21} h y'(t^n) f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^2)]$$

$$+O(h^2)] - [\cancel{y(t^n)} + h y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(t^n) + O(h^3)]$$

$$= (\cancel{b_1 + b_2 - 1}) h y'(t^n) + b_2 c_2 h^2 f_t(t^n, y(t^n)) + b_2 a_{21} h^2 y'(t^n) f_y(t^n, y(t^n)) - \frac{h^2}{2} y''(t^n) + O(h^3)$$

- $b_1 + b_2 = 1$

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Longrightarrow$$
$$y''(t) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t)) y'(t)$$

$$(e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot 2x$$

$$= b_2 c_2 h^2 f_t(t^n, y(t^n)) + b_2 a_{21} h^2 y'(t^n) f_y(t^n, y(t^n)) - \frac{h^2}{2} f_t(t^n, y(t^n))$$

$$- \frac{h^2}{2} f_y(t^n, y(t^n)) \cdot y'(t^n) + O(h^3)$$

$$= \underbrace{\left(b_2 c_2 - \frac{1}{2}\right)}_{=0} h^2 f_t(t^n, y(t^n)) + \underbrace{\left(b_2 a_{21} - \frac{1}{2}\right)}_{=0} h^2 f_y(t^n, y(t^n)) y'(t^n) + O(h^3)$$

- $b_2 c_2 = \frac{1}{2}$
- $b_2 a_{21} = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1 \\ b_2 c_2 = \frac{1}{2} \\ b_2 a_{21} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Για $b_2 \in \mathbb{R}$, $b_2 \neq 0$ έχουμε $\boxed{b_1 = 1 - b_2, \ a_{21} = c_2 = \frac{1}{2b_2}}$

$\boxed{p \geq 2}$

$$\begin{cases} y'(t) = t^2, & 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Αυτό δίνει $p \le 2$ όταν $\tau_2 \ne \frac{2}{3}$ (άρα δεν το χρησιμοποιούμε)

$$\begin{cases} y' = y, & 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y(t) = e^t$$

Τοπικό σφάλμα:

$$\delta^n = \underset{y(t^n)}{e^{nh}} + b_1 h e^{nh} + b_2 h [y(t^n) + h a_{21} y'(t^n)] - y(t^{n+1})$$

$$= e^{nh}[1 + b_1 h + b_2 h + b_2 a_{21} h^2 - e^h]$$

$$= e^{nh}(1 + h + \frac{h^2}{2} - e^h)$$

$$|\delta^n| = \underbrace{|e^{nh}|}_{\ge 1} \cdot |1 + h + \frac{h^2}{2} - e^h|$$

$$\ge |1 + h + \frac{h^2}{2} - e^h| =$$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} e^\xi$ με ξ ανάμεσα στο 0 και το x

$$|-\frac{h^3}{6} e^\xi| = \frac{h^3}{6} \underbrace{e^\xi}_{\ge 1} \ge \frac{h^3}{6}$$

3.8 15/12/2011

$$\left(\begin{array}{c|c} a & \tau \\ \hline b & \end{array} \quad \text{και} \quad p = 2 \right) \Leftrightarrow \begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & \end{array}$$

Θεωρία: $\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & \end{array} \Rightarrow p = 2$

παράδειγμα 3.2

$$\begin{cases} y' = y, & 0 \le t \le 1, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$ (Ελπίζουμε να αποδείξουμε ότι $a = \frac{1}{2}$ και $b = 1$)

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{1}{N}$, $t^n := nh$, $n = 0, \dots, N$

$$f^{n,1} = y(t^n) + ah f^{n,1} \longrightarrow f^{n,1} = \frac{1}{1-ah} y(t^n)$$
$$\delta^n = y(t^n) + bh f^{n,1} - y(t^{n+1})$$

Άρα: $\delta^n = \underbrace{y(t^n)}_{e^{t^n}} + \frac{bh}{1-ah} y(t^n) - \underbrace{y(t^{n+1})}_{e^{t^n+h}}$

$(y(t) = e^t)$

$$= e^{t^n} \left[1 + \frac{bh}{1-ah} - e^h \right]$$

$$\left| 1 + \frac{bh}{1-ah} - e^h \right| \le |\delta^n| \le e \left| 1 + \frac{bh}{1-ah} - e^h \right|$$

$$\delta^n = O(h^2) \Leftrightarrow 1 + \frac{bh}{1-ah} - e^h = O(h^2)$$

$$\Leftrightarrow 1 + bh(1 + ah + \cancel{a^2h^2}) - e^h + O(h^3) = O(h^3)$$

$$\cancel{\Leftrightarrow 1 + bh - abh^2 + a^2bh^3 - (1 + h + \frac{h^2}{2}) + O(h^3) = O(h^3)}$$

$$\cancel{\Leftrightarrow \begin{cases} b - 1 = 0 \\ ab - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{1} + bh + abh^2 - (\cancel{1} + h + \frac{h^2}{2}) + O(h^3) = O(h^3)$$

$$\Leftrightarrow (b-1)h + (ab - \frac{1}{2})h^2 + O(h^3) = O(h^3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b - 1 = 0 \\ ab - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = 3t^2, & 0 \le t \le 1, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$ (Ελπίζουμε να αποδείξουμε ότι $c = \frac{1}{2}$.)

$$y(t) = t^3$$

$$\delta^n = y(t^{n}) + bh3(t^{n,1})^2 - y(t^{n+1})$$
$$= y(t^n) + 3bh(t^n + \tau h)^2 - y(t^{n+1})$$
$$= \cancel{(t^n)^3} + 3bh(t^n)^2 + 6bt^n\tau h^2 + 3b\tau^2h^3 - (t^n+h)^3$$
$$= \cancel{(t^n)^3} + \cancel{3b(t^n)^2 h} + 6bt^n\tau h^2 + 3b\tau^2h^3 - \cancel{(t^n)^3} - \cancel{3(t^n)^2h} - 3t^nh^2 - h^3$$

$b=1$

$$= 3t^n(2\tau-1)h^2 + (3\tau^2-1)h^3$$

$$\delta^n = O(h^3) \Leftrightarrow 2\tau - 1 = 0 \Leftrightarrow \tau = \frac{1}{2}$$