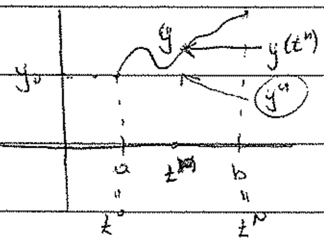
Κεφάλαιο 2ο:

Η μέθοδος του Euler

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Υπόθεση: Το πρόβλημα έχει μοναδική λύση



Διαμερισμός: $a = t^0 < t^1 < \dots < t^N = b$

Ομοιόμορφος διαμερισμός:

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h := \frac{b-a}{N}$, $t^n := a + nh$, $n = 0, \dots, N$.

βήμα $\quad t^{n+1} - t^n = h$

$$\boxed{\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n), & n = 0, \dots, N-1, \\ y^0 = y_0 \end{cases}}$$

- Πώς οδηγούμαστε στη μέθοδο;
- Κόστος;
- Ακρίβεια;

$$y'(t^n) = f(t^n, y(t^n))$$

$$y'(t^n) \approx \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$$

προσέγγιση

2.2

(+) $\boxed{\dfrac{y(t^{n+1})-y(t^n)}{h} \approx f(t^n, y(t^n))}$

Υποθέτοντας ότι το y^n είναι αρκετά καλή προσέγγιση του $y(t^n)$ και αντικαθιστώντας στην (+) το $\approx$ με $=$ οδηγούμαστε στην προσέγγιση y^{n+1}:

$$\boxed{\frac{y^{n+1}-y^n}{h} = f(t^n, y^n)}$$

- **Κόστος της μεθόδου ανά βήμα:**

Ένας υπολογισμός της f ανά βήμα.

- **Ακρίβεια:** $\varepsilon^n := y(t^n) - y^n$

Λήμμα: (σημαντικό βοηθητικό αποτέλεσμα)

Έστω δ ένας θετικός αριθμός και $k, d_0, d_1, \dots$ μη αρνητικοί αριθμοί τ.ώ.:

$$d_{i+1} \leq (1+\delta) d_i + k, \quad i=0, \dots$$

Τότε ισχύει

$$d_n \leq d_0 e^{n\delta} + k \frac{e^{n\delta}-1}{\delta}, \quad n=0,1,2,\dots$$

Απόδειξη:

$n=0$: $d_0 \leq d_0 \cdot \cancel{e^{0\delta}}^{1} + \underbrace{k \frac{\cancel{e^{0\delta}}^{1}-1}{\delta}}_{=0}$

$\Longleftarrow d_0 \leq d_0$ ✓

$n\geq 1$: Ισχυρισμός:

$(**)$ $d_n \leq (1+\delta)^n d_0 + k[1+(1+\delta)+(1+\delta)^2+\dots+(1+\delta)^{n-1}]$.

$n=1$: $d_1 \leq (1+\delta)d_0 + k$ ✓

$\underline{n \to n+1:}$

$$d_{n+1} \leq (1+\delta)d_n + k$$

$$\underset{(\Upsilon\pi.\,E\pi)}{\leq} (1+\delta)\{(1+\delta)^n d_0 + k[1+(1+\delta)+\dots+(1+\delta)^{n-1}]\} + k$$

$$= (1+\delta)^{n+1}d_0 + k[1+(1+\delta)+\dots+(1+\delta)^n] \quad ✓$$

$$d_n \leq (1+\delta)^n d_0 + k\underbrace{[1+(1+\delta)+\dots+(1+\delta)^{n-1}]}_{=\frac{(1+\delta)^n-1}{(1+\delta)-1}}$$

$1+\omega+\omega^2+\dots+\omega^{n-1} = \frac{\omega^n-1}{\omega-1}$

$$\Longrightarrow \boxed{d_n \leq (1+\delta)^n d_0 + k\,\frac{(1+\delta)^n-1}{\delta}}$$

Τώρα: $e^\delta \geq 1+\delta$

$e^x \geq 1+x, \quad x>0$

- $e^x = 1 + x + \underbrace{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots}_{>0}$

- $\phi(x) = e^x-(1+x)$

  $\phi(0)=0$

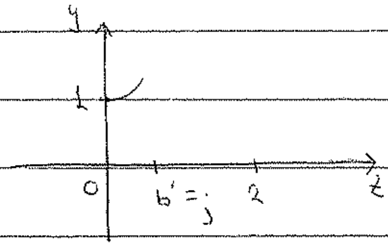
  $\phi'(x) = e^x - 1 \geq 0$ αύξουσα

Ενδ. Εξετ.
1η 3-12-2011
2η 14-1-2012
3η 28-1-2012

27/10/2011

Άσκηση 1.4

$$\begin{cases} y' = y^2, & 0 \le t \le 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$



$f(t,y) = y^2$

Θεωρούμε ένα διάστημα $[1-c, 1+c]$, με $c>0$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}\times[1-c,1+c]$ και

$f_y(t,y) = 2y$ που είναι φραγμένη, οπότε η f ικανοποιεί

την τοπική συνθήκη του Lipschitz ως προς y.

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα 1.2, το πρόβλημα έχει μοναδική

λύση, τουλάχιστον στο διάστημα $[0, b']$ με $b' = \min\left(2, 0 + \frac{c}{A}\right)$

με $A = \max\limits_{\substack{0\le t\le 2 \\ 1-c \le y \le 1+c}} |y^2| = \max\limits_{1-c\le y\le 1+c} |y^2| = (1+c)^2$.

$b' = \min\left(b, a + \frac{c}{A}\right)$

$A = \max\limits_{\substack{a \le t \le b \\ y_0 - c \le y \le y_0 + c}} |f(t,y)|$

Για ποια τιμή του c προκύπτει η μεγαλύτερη τιμή του b';

Έχουμε $b' = \min\left(2, \frac{c}{(1+c)^2}\right) = \frac{c}{(1+c)^2} = \frac{c}{1+2c+c^2} = \frac{1}{2+\left(c+\frac{1}{c}\right)}$

Τώρα $c + \frac{1}{c} \ge 2 \iff c^2 + 1 \ge 2c \iff$

$(c-1)^2 \ge 0$ ισχύει

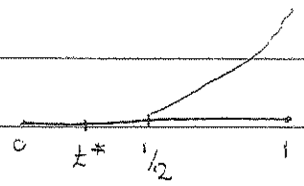
Για $c=1$ έχουμε $c + \frac{1}{c} = 2$.

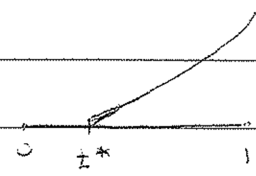
Η μέγιστη τιμή του b' προκύπτει για $c=1$

και είναι $b' = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$.

Άσκηση 1.6

$t^* \in (0,1)$





$$(*)\begin{cases} y' = \sqrt{|y|}, & 0 \le t \le 1, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Για ποιο c είναι η

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le t^*, \\ c(t-t^*)^2, & t^* < t \le 1, \end{cases}$$

λύση του (*) $\quad (c \neq 0)$

Προφανώς, για κάθε τιμή του c, η y είναι συνεχής και συνεχώς παραγωγίσιμη.

Επίσης, ικανοποιεί την αρχική συνθήκη.

Μένει να ελέγξουμε αν ικανοποιεί τη Δ.Ε.

Για $t > t^*$ έχουμε $y'(t) = \sqrt{|y(t)|} \iff 2c(t-t^*) = \sqrt{|c|(t-t^*)^2} \iff$

$$\iff 2c\,\cancel{(t-t^*)} = \sqrt{|c|}\cdot \underbrace{\cancel{(t-t^*)}}_{>0}$$

$$\iff \boxed{2c = \sqrt{|c|}}$$

$$2c = \sqrt{|c|} \iff c \ge 0 \text{ και } 2c = \sqrt{c}$$

$$\iff c \ge 0 \text{ και } 4c^2 = c$$

$$\iff c = 0 \text{ και } \boxed{c = 1/4}$$

Άρα:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le t^*, \\ \frac{1}{4}(t-t^*)^2, & t^* < t \le 1. \end{cases}$$

Άσκηση 1.9

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z' = f(t,z), & a \le t \le b, \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

$f : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και τ.ω.

$\forall t \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$[f(t,y_1) - f(t,y_2)] \cdot (y_1 - y_2) \le \nu (y_1 - y_2)^2$

$\boxed{\text{με } \nu \in \mathbb{R}}$

ΝΔΟ:

$|y(t) - z(t)| \le e^{\nu(t-a)} |y_0 - z_0| \quad \forall t \in [a,b].$

Απόδειξη

$\varepsilon(t) = y(t) - z(t),$

$\varepsilon'(t) = f(t, y(t)) - f(t, z(t))$

$$\Rightarrow \varepsilon(t)\,\varepsilon'(t) = \underbrace{[f(t,y(t)) - f(t,z(t))] \cdot [y(t) - z(t)]}_{\le \nu [y(t) - z(t)]^2}$$

Άρα $\frac{1}{2}\left((\varepsilon(t))^2\right)' \le \nu (\varepsilon(t))^2 \quad t \in [a,b].$

Με $\phi(t) := (\varepsilon(t))^2$ έχουμε $\frac{1}{2}\phi'(t) \le \nu \phi(t)$

$\Longleftrightarrow \phi'(t) - 2\nu\phi(t) \le 0$

$\Longleftrightarrow \left(e^{-2\nu t}\phi(t)\right)' \le 0$

Άρα

$e^{-2\nu t}\phi(t) \le e^{-2\nu a}\phi(a)$ ή $\phi(t) \le e^{2\nu(t-a)}\phi(a)$ ή $(\varepsilon(t))^2 \le e^{2\nu(t-a)}(\varepsilon(a))^2$ ή

$\boxed{|\varepsilon(t)| \le e^{\nu(t-a)} |\varepsilon(a)|}$ ✓

Θεώρημα (Εκτίμηση του σφάλματος της μεθόδου του Euler)

Έστω $f \in C([a,b]\times\mathbb{R})$ συνάρτηση που ικανοποιεί τη συνθήκη (**)
Έστω $y \in C^2[a,b]$ λύση του (*)
Αν $y^0, \dots, y^N$ οι προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος του Euler (+), τότε ισχύει $\max\limits_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le \frac{M}{2L}[e^{L(b-a)}-1]\cdot h$

με $\boxed{M := \max\limits_{a\le t\le b} |y''(t)|}$

$$(*) \begin{cases} y' = f(t,y), & a < t < b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$f \in C([a,b]\times\mathbb{R})$

$$(**) \quad \exists\, L \ge 0 \;\forall t \in [a,b] \;\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

$$(+) \begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n), & n = 0, \dots, N-1, \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

Απόδειξη

Έστω $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Τότε

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{y'(t^n)} + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

Taylor:

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + (t^{n+1} - t^n) y'(t^n) + \frac{(t^{n+1}-t^n)^2}{2} y''(\xi_n), \text{ με } \xi_n \in (t^n, t^{n+1})$$

$$\begin{cases} y(t^{n+1}) = y(t^n) + hf(t^n, y(t^n)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \\ y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n) \end{cases}$$

Θέτουμε $e^m := y(t^m) - y^m$ και έχουμε : $e^{n+1} = e^n + h[f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)] + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$.

Άρα $|\varepsilon^{n+1}| \le |\varepsilon^n| + h\underbrace{|f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)|}_{\le L|y(t^n)-y^n| = L|\varepsilon^n|} + \frac{h^2}{2}|y''(\xi_n)|$

$$|\varepsilon^{n+1}| \le |\varepsilon^n| + Lh|\varepsilon^n| + \frac{h^2}{2}M$$

ή

$$\boxed{|\varepsilon^{n+1}| \le (1+Lh)|\varepsilon^n| + \frac{Mh^2}{2}, \quad n=0,\dots,N-1}$$

$$d_{i+1} \le (1+\delta)d_i + K$$

Επομένως, σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα,

$$|\varepsilon^n| \le e^{nLh}|\varepsilon^0| + \frac{Mh^2}{2}\,\frac{e^{nLh}-1}{Lh}, \quad n=0,\dots,N$$

Άρα

$$|\varepsilon^n| \le \frac{M}{2L}\left[e^{L\overset{t^n-a}{\overset{\shortparallel}{(nh)}}}-1\right]\cdot h \qquad (t^n = a + nh, \; n=0,\dots,N)$$

$$|\varepsilon^n| \le \frac{M}{2L}\left[e^{L\overbrace{(t^n-a)}^{\le b-a}}-1\right]\cdot h$$

$$\Rightarrow \underbrace{|\varepsilon^n| \le \frac{M}{2L}\left[e^{L(b-a)}-1\right]\cdot h}_{\text{ανεξ. του } n}.$$

$$\Rightarrow \max_{0\le n\le N} |\varepsilon^n| \le \frac{M}{2L}\left[e^{L(b-a)}-1\right]\cdot h$$

Euler

$y \in C^2[a,b]$

$\max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le Ch$

- Η δύναμη του h σε αυτή την εκτίμηση είναι ένα, γι' αυτό λέμε ότι η τάξη ακρίβειας της μεθόδου του Euler είναι (τουλάχιστον) ένα

- Αν $y \in \mathbb{P}_1$ τότε $y(t^n) = y^n$.

01/11/2011

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

συνθήκη Lipschitz

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n := a + nh$, $n = 0, \dots, N$

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n), & n = 0, \dots, N-1, \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

(*) $\max\limits_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le Ch$

$$C = \frac{M}{2L}\left[e^{L(b-a)} - 1\right]$$

$$\boxed{M := \max_{a \le t \le b} |y''(t)|}$$

Η τάξη ακρίβειας της μεθόδου του Euler είναι (τουλάχιστον) ένα.

- Αν $y''(t) = 0 \quad \forall t \in [a,b]$, τότε $y(t^n) = y^n$, $n = 0, \dots, N$

Π.χ., για

$$\begin{cases} y'(t) = 1, & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

το σφάλμα είναι μηδέν

Γενικά η δύναμη του h στην εκτίμηση (*) δεν μπορεί να βελτιωθεί: Αρκεί να δώσουμε ένα παράδειγμα τ.ω. η y να είναι ομαλή και

(**) $\max\limits_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \ge ch$, με $c > 0$.

$ch \le C h^{1+\varepsilon} \Leftrightarrow$

$\underset{>0}{c} \le \underset{>0}{C} h^{\varepsilon} \to 0$

$\Leftrightarrow c \le 0$ άτοπο

Επιλέγουμε ένα παράδειγμα με λύση τ.ώ. $y''(t) =$ σταθ.

$$\begin{cases} y'(t) = 2t, & 0 \le t \le 1, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{y(t) = t^2}$$

__Euler:__ $y^0 = 0$ $\quad h = \frac{1}{N}, \; t^n = nh, \; n = 0, \dots, N$

$$y^{n+1} = y^n + h \cdot 2t^n = y^n + h \cdot 2nh$$
$$= y^n + 2nh^2$$

$$\boxed{y^{n+1} = y^n + 2nh^2}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

$y^0 = 0, \; y^1 = 0, \; y^2 = 2 \cdot 1 \cdot h^2$

$$y^3 = 2 \cdot h^2 + 2 \cdot 2 \cdot h^2 = 2(1+2)h^2$$
$$y^4 = 2(1+2)h^2 + 2 \cdot 3 \cdot h^2$$
$$= 2(1+2+3)h^2$$

__Γενικά:__

$$y^n = 2[1+2+\dots+(n-1)]h^2, \quad n = 0, \dots, N$$

$$y^n = 2\underbrace{[1+2+\dots+(n-1)]}_{= \frac{(n-1)n}{2}}h^2$$

$$= n(n-1)h^2$$

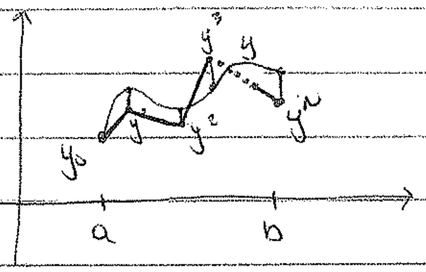
$$y^n = n(n-1)h^2, \quad n = 0, \dots, N$$

Επομένως,

$$y(t^N)-y^N = y(1)-y^N = 1-y^N$$
$$= 1-N(N-1)h^2 = 1-(N-1)h$$
$$= \cancel{1}-\cancel{Nh}+h = h$$
$$\Rightarrow |y(t^N)-y^N| \geq h$$

Σύμφωνα με την (∗∗), η τάξη ακρίβειας της μεθόδου του Euler είναι το πολύ ένα.

Συμπέρασμα: τάξη = 1



Σχόλιο:

$$Y(t) = y^n + \frac{y^{n+1}-y^n}{t^{n+1}-t^n}(t-t^n),\ t\in[t^n,t^{n+1}),\quad n=0,\dots,N-1$$

Τότε

$$\max_{a\leq t\leq b} |y(t)-Y(t)| \leq C_1 h$$

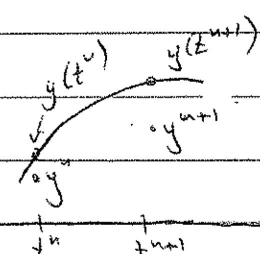
$\varepsilon^n = y(t^n)-y^n$: σφάλμα διακριτοποίησης

-//- προσέγγισης

ολικό σφάλμα

Τοπικό σφάλμα:

$$\delta^n := [y(t^n)+hf(t^n,y(t^n))]-y(t^{n+1})$$



Είναι το σφάλμα που προκύπτει της μεθόδου του Euler, εάν ξεκινήσαμε από την ακριβή τιμή $y(t^n)$ και κάναμε ένα μόνο βήμα.

$$\Longleftrightarrow \boxed{y(t^{n+1}) = y(t^n) + hf(t^n, y(t^n))} - \delta^n$$

Τάξη του δ^n;

$$\delta^n = [\cancel{y(t^n)} + h\underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{y'(t^n)}] - [\cancel{y(t^n)} + \cancel{h y'(t^n)} + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)]$$

$$= -\frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

$$\boxed{\text{Τάξη του τοπικού σφάλματος} = 2}$$

1η Εξήγηση:

Σε ένα βήμα έχω σφάλμα τάξης h^2

Σε $\underset{\frac{b-a}{h}}{N}$ βήματα έχω σφάλμα τάξης $\frac{b-a}{h} h^2 = O(h)$

2η Εξήγηση:

Πόσο καλή είναι αυτή η προσέγγιση;

$$y'(t^n) = f(t^n, y(t^n)) \quad \boxed{y'(t^n) \simeq \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}}$$

$$\frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} - y'(t^n) = \frac{\cancel{y(t^n)} + h y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) - \cancel{y(t^n)}}{h} - \cancel{y'(t^n)}$$

$$= \frac{h}{2} y''(\xi_n)$$

$$\boxed{\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = f(t^n, y^n)}$$

Τι ισχύει στην περίπτωση της μεθόδου του Euler για συστήματα Δ.Ε;

$$(++)\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$y:[a,b]\to\mathbb{R}^m$, $f:[a,b]\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$

Έστω $\|\cdot\|$ νόρμα στην $\mathbb{R}^m$:

$$(+)\begin{cases} \exists L\geq 0\ \forall t\in[a,b]\ \forall y,\tilde{y}\in\mathbb{R}^m \\ \|f(t,y)-f(t,\tilde{y})\|\leq L\|y-\tilde{y}\|. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^n,y^n),\ n=0,\dots,N-1 \\ y^0 = y^0 \end{cases}$$

$y^n\in\mathbb{R}^m$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f:[a,b]\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ μία συνάρτηση που ικανοποιεί την (+).

Έστω $y=(y_1,y_2,\dots,y_m)^T$, $y_i\in C^2[a,b]$, η λύση του (++).

Αν $y^0,\dots,y^N$ είναι οι προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος του Euler με βήμα $h=\frac{b-a}{N}$, τότε

$$\max_{0\leq n\leq N}\|y(t^n)-y^n\|\leq \frac{M}{2L}C_1[e^{L(b-a)}-1]h$$

με $M:=\max_{a\leq t\leq b}\|y''(t)\|_\infty$ και C_1 τ.ω

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^m\ \ \|x\|\leq C_1\|x\|_\infty}$$

$y:[a,b]\to\mathbb{R}$

$y(t^{n+1}) = y(t^n)+hy'(t^n)+\frac{h^2}{2}y''(\xi_n)$, με $\xi_n\in(t^n,t^{n+1})$

~~$y:[a,b]\to\mathbb{R}^m$~~

$y:[a,b] \to \mathbb{R}^m$

$y_i(t^{n+1}) = y_i(t^n) + h y_i'(t^n) + \frac{h^2}{2} y_i''(\xi_{ni})$

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h y'(t^n) + \frac{h^2}{2}\begin{pmatrix} y_1''(\xi_{n1}) \\ y_2''(\xi_{n2}) \\ \vdots \\ y_m''(\xi_{nm}) \end{pmatrix}$$

Μέχρι τώρα υποθέσαμε ότι οι προσεγγίσεις y^n υπολογίζονται ακριβώς. Στην πραγματικότητα έχουμε και σφάλματα στρογγύλευσης.

Ευστάθεια της μεθόδου του Euler

- Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz.

ευστάθεια, συνέπεια $\Rightarrow$ σύγκλιση, εκτίμηση σφάλματος

$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ $\begin{cases} z' = f(t,z), & a \le t \le b, \\ z(a) = z_0 \end{cases}$

Ευστάθεια:

$$\max_{a\le t\le b} |y(t) - z(t)| \le e^{L(b-a)} |y_0 - z_0|$$

$$\left(|y(t) - z(t)| \le e^{L(t-a)} |y_0 - z_0| \right)$$

Ισχύει κάτι "αντίστοιχο" για τη μέθοδο;

Ισχυρισμός

$$\max_{0\le n\le N} |y^n - z^n| \le e^{L(b-a)} |y_0 - z_0|$$

$$\left(|y^n - z^n| \le e^{L(t^n - a)} |y_0 - z_0| \right)$$

3/11/2011

<u>Ασκηση 1.10</u>

$f: [a,b]\times\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$\forall t\in[a,b]\ \forall y,\tilde{y}\in\mathbb{R}^m$

$(f(t,y)-f(t,\tilde{y}), y-\tilde{y})$

$$\begin{cases} y'=f(t,y), & a\le t\le b \\ y(a)=y_0 \end{cases} \quad\Bigg|\quad \begin{cases} z'=f(t,z), & a\le t\le b, \\ z(a)=z_0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_n\end{pmatrix} \\ (x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n \\ \|x\|=(x,x)^{1/2}=(x_1^2+\dots+x_n^2)^{1/2} \end{array} \right\}$$

Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο

Ευκλείδια νόρμα

<u>ΝΔΟ:</u>

$$\|y(t)-z(t)\|=\|y_0-z_0\|$$

<u>Απόδειξη:</u> $\varepsilon(t):=y(t)-z(t)$, $a\le t\le b$

Έχουμε,

$$\varepsilon'(t)=f(t,y(t))-f(t,z(t))$$

Παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο με το $\varepsilon(t)$, οπότε έχουμε

$$(\varepsilon'(t),\varepsilon(t))=\underbrace{(f(t,y(t))-f(t,z(t)),\ y(t)-z(t))}_{\le 0}$$

Άρα, $(\varepsilon'(t),\varepsilon(t))\le 0$

$\varepsilon'(t)\cdot\varepsilon(t)\le 0$

$\frac{1}{2}((\varepsilon(t))^2)'\le 0$

οπότε,

$$\varepsilon_1'(t)\varepsilon_1(t)+\varepsilon_2'(t)\varepsilon_2(t)+\dots+\varepsilon_m'(t)\varepsilon_m(t)\le 0$$

ή

$$\tfrac{1}{2}((\varepsilon_1(t))^2)'+\tfrac{1}{2}((\varepsilon_2(t))^2)'+\dots+\tfrac{1}{2}((\varepsilon_m(t))^2)'\le 0$$

ή

$$\left((\varepsilon_1(t))^2+\dots+(\varepsilon_m(t))^2\right)'\le 0$$

ή

$$(\|\varepsilon(t)\|^2)'\le 0$$

Επομένως, η συνάρτηση $\|\varepsilon(t)\|^2$ είναι φθίνουσα,

οπότε

$$\|\varepsilon(t)\|^2 \leq \|\varepsilon(a)\|^2, \quad a \leq t \leq b,$$

ή

$$\boxed{\|y(t) - z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\|, \quad a \leq t \leq b}$$

Άσκηση 1.12 (ανισότητα του Gronwall)

$\varphi : [0, T] \to \mathbb{R}$ συνεχής

$a, b \in \mathbb{R}, \; b \geq 0$

Αν

$$\phi(t) \leq a + b\int_0^t \phi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

ΝΔΟ:

$$\phi(t) \leq a e^{bt} \quad \forall t \in [0, T].$$

$\varepsilon > 0$

$$\psi(t) = a + \varepsilon + b\int_0^t \psi(s)ds, \quad t \in [0, T]$$

ΝΔΟ:

$$\psi(t) = a + \varepsilon + b\int_0^t \psi(s)ds, \quad t \in [0, T].$$

Απόδειξη:

$$a+\varepsilon+b\int_0^t \psi(s)\,ds = a+\varepsilon+b(a+\varepsilon)\int_0^t e^{bs}\,ds$$

$$\int_0^t e^{bs}\,ds = \frac{1}{b}\int_0^{bt} e^{\tau}\,d\tau = \frac{1}{b}\left[e^{bt}-e^{0}\right] = \frac{1}{b}\left(e^{bt}-1\right)$$

$$= a+\varepsilon+\cancel{b}(a+\varepsilon)\frac{1}{\cancel{b}}\left(e^{bt}-1\right)$$

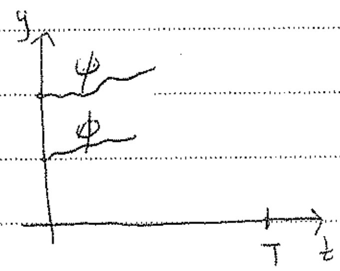
$$= \cancel{(a+\varepsilon)}+(a+\varepsilon)\left[e^{bt}\cancel{-1}\right]$$

$$= (a+\varepsilon)e^{bt} = \psi(t)$$

(Σύγκριση των $\phi(t)$ και $\psi(t)$)

$$\phi(0)\le a+0 = a < a+\varepsilon = \psi(0)$$

$$\boxed{\phi(0)<\psi(0)}$$



Ισχυρισμός: $\forall t\in[0,T]$

$$\phi(t)<\psi(t)$$

Αν ισχύει ο ισχυρισμός:

$$\phi(t)<\psi(t) = (a+\varepsilon)e^{bt}$$

$$\boxed{\phi(t)<ae^{bt}+\varepsilon e^{bt}} \Rightarrow \varphi(t)\le ae^{bt}$$, αφού ισχύει για κάθε θετικό ε

Με απαγωγή σε άτοπο:

Έστω $t_0\in[0,T]$ ένας αριθμός τ.ώ.

$$\phi(t)<\psi(t) \quad \forall t\in[0,t_0)$$

$$\phi(t_0)=\psi(t_0)$$

Τότε

$$\phi(t_0)\le a+b\int_0^{t_0}\phi(s)\,ds < \underbrace{a+b\int_0^{t_0}\psi(s)\,ds}_{\psi(t_0)-\varepsilon}$$

$$<\psi(t_0)$$, άτοπο

Ευστάθεια μεθόδου του Euler

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z' = f(t,z), & a \le t \le b, \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

$\exists L \geq 0 \quad \forall t \in [a,b] \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

$$|y(t) - z(t)| \le e^{L(t-a)} |y_0 - z_0|, \ t \in [a,b]$$

$$\max_{a \le t \le b} |y(t) - z(t)| \le e^{L(b-a)} |y_0 - z_0|$$

Ισχύουν για τη μέθοδο του Euler αντίστοιχες εκτιμήσεις;

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n), & n = 0, \dots, N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + hf(t^n, z^n) \\ z^0 = z_0 \end{cases}$$

Τότε

$$y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h[f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)]$$

$\Longrightarrow$

$$|y^{n+1} - z^{n+1}| \le |y^n - z^n| + h\underbrace{|f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)|}_{\le L|y^n - z^n|}$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{|y^{n+1} - z^{n+1}| \le (1+Lh)|y^n - z^n|}$$

$\Longrightarrow$

(*) $$\boxed{|y^n - z^n| \le (1+Lh)^n |y^0 - z^0|, \ n = 0, \dots, N}$$

$e^{Lh} \geq 1+Lh$

Άρα

$$|y^n-z^n| \leq (e^{Lh})^n |y_0-z_0|$$
$$= e^{Lnh}|y_0-z_0|$$
$$= e^{L(t^n-a)} |y_0-z_0|$$

$$\Longrightarrow \boxed{|y^n-z^n| \leq e^{L(t^n-a)} |y_0-z_0|}$$

Επίσης

$$\boxed{\max_{0\leq n\leq N} |y^n-z^n| \leq e^{L(b-a)} |y_0-z_0|}$$ Ευστάθεια

Απόδειξη της (*) με επαγωγή:

$n=0$: ✓

$n \to n+1$:

$$|y^n-z^{n+1}| \leq (1+Lh)|y^n-z^n|$$
$$\leq (1+Lh)(1+Lh)^n |y^0-z^0|$$

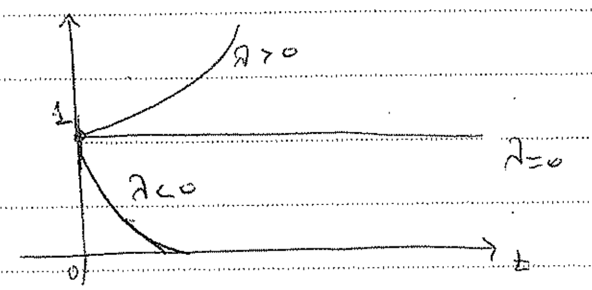
Υπ. επαγ.

$$= (1+Lh)^{n+1} |y^0-z^0|$$

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & t \in [0,\infty) \\ y(0)=1 \end{cases}$$

Πρόβλημα δοκιμής

Λύση: $y(t)=e^{\lambda t}$, $t\geq 0$



Έστω $h>0$ και $t^n = nh, n=0,1,2,\dots$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο του Euler:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h \cdot \lambda y^n, & n=0,1,\dots \\ y^0 = 1 \end{cases}$$

$$y^{n+1} = (1+\lambda h) y^n$$

$$\Rightarrow \boxed{y^n = (1+\lambda h)^n, \ n \in \mathbb{N}_0}$$

Πώς συμπεριφέρεται το $|y^n|$;

$\boxed{\lambda<0}$

$|y^n| = |1+\lambda h|^n$

- $|y^n| \to 0$, αν $|1+\lambda h| < 1$
- $|y^n| = 1$, αν $|1+\lambda h| = 1$
- $|y^n| \to \infty$, αν $|1+\lambda h| > 1$

Η μέθοδος μπορεί να δώσει "λογικές" προσεγγίσεις μόνο αν $|1+\lambda h| \leq 1$.

$$|1+x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 1+x \leq 1$$
$$\Leftrightarrow \boxed{-2 \leq x \leq 0}$$

Δηλ. $\boxed{\text{για } \lambda h \in [-2, 0]}$

Διάστημα <u>απόλυτης</u> ευστάθειας της μεθόδου του Euler: $[-2,0]$

Θέλουμε $\lambda h \geq -2$ ή $\boxed{h \leq -\frac{2}{\lambda}}$

Ιστοσελίδα Μαθήματος : .../~akrivis/courses/CompMath
(τμήμα)

8/11/11

Απόλυτη ευστάθεια - Άκαμπτα συστήματα

$$(*)\begin{cases} y' = \lambda y, & t>0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{C}$, $Re\lambda < 0$

$$y(t) = e^{\lambda t} = e^{(Re\lambda + i Im\lambda)t} = e^{(Re\lambda)t} \cdot e^{i(Im\lambda)\cdot t}$$

$$|y(t)| = |e^{(Re\lambda)t}| \cdot \underbrace{|e^{i(Im\lambda)t}|}_{=1} = e^{(Re\lambda)t}$$

$x \in \mathbb{R}$

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$\Rightarrow |e^{ix}| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$

$$|y(t)| = e^{(Re\lambda)t}$$

Όταν $Re\lambda < 0$, τότε $|y(t)| \to 0$, $t \to \infty$

Μέθοδος του Euler για το (*):

$y^n = (1+\lambda h)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$

Άρα

$$\boxed{|y^n| = |1+\lambda h|^n}$$

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & t>0, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$\lambda < 0$

$h > 0$

$y^n = (1+\lambda h)^n$, $n \in \mathbb{N}$

$|1+\lambda h| \le 1$

$$\boxed{-2 \le \lambda h \le 0}$$

$I = [-2, 0]$ διάστημα απόλυτης ευστάθειας

(*) $x' = Ax$

$A \in \mathbb{R}^{m,m}$

$x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$

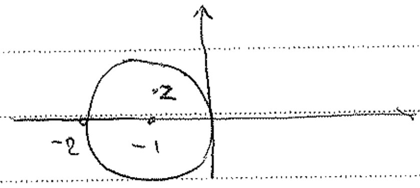
Υπόθεση: ο A διαγωνιοποιείται, δηλ. υπάρχει ένας πίνακας $B \in \mathbb{C}^{m,m}$, τ.ω. ο $B^{-1}AB$ να είναι διαγώνιος. Τότε το (*) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή $\boxed{y' = \Lambda y}$ με $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ οι ιδιοτιμές του A. $\boxed{y_i' = \lambda_i y_i, \ i=1,\dots,m}$

Η $(|y^n|)_{n \in \mathbb{N}_0}$ είναι φραγμένη, αν και μόνο αν $|1+\lambda h| \le 1$.

$x \in \mathbb{R}$ $\quad |1+x| \le 1 \iff -2 \le x \le 0$

$z \in \mathbb{C}$

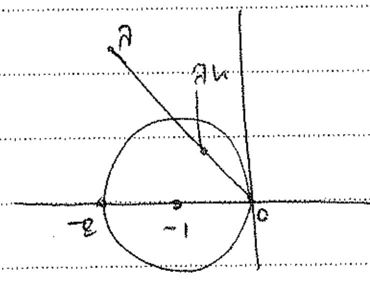
$\underbrace{|1+z|}_{z-(-1)} \le 1 \iff z \in C$ = κύκλος με κέντρο το -1 και ακτίνα 1



Αυτός ο κύκλος λέγεται <u>περιοχή απόλυτης ευστάθειας</u> της μεθόδου του Euler.

<u>Ορισμός</u> (Περιοχή απόλυτης ευστάθειας μιας μεθόδου)

Η περιοχή απόλυτης ευστάθειας μιας μεθόδου είναι το σύνολο των λh, στο μιγαδικό επίπεδο, με την ιδιότητα οι προσεγγίσεις y^n που δίνει η μέθοδος για το πρόβλημα (*) με βήμα h να παραμένουν φραγμένες.

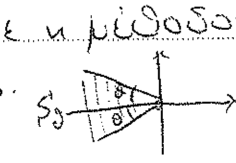


<u>Στόχος:</u> Η περιοχή απόλυτης ευστάθειας μιας μεθόδου θα θέλαμε να είναι όσο πιο μεγάλη γίνεται.

- Αν η S περιέχει όλο το αρνητικό μιγαδικό ημιεπίπεδο $\{x+iy : x<0\}$, τότε η μέθοδος λέγεται <u>A-ευσταθής</u>.

- Αν η S περιέχει τον αρνητικό ημιάξονα, τότε η μέθοδος λέγεται <u>A_0-ευσταθής</u>.

- Έστω $\theta \in (0, \pi/2)$. Αν η S περιέχει τον τομέα S_θ, τότε η μέθοδος λέγεται $A(\theta)$-ευσταθής.



Ένα σύστημα Δ.Ε $x' = Ax$ λέγεται άκαμπτο, αν υπάρχουν ιδιοτιμές λ_μ και λ_ν του A τ.ώ $Re\lambda_\mu < 0$, $Re\lambda_\nu < 0$, και
$|Re\lambda_\mu| >> |Re\lambda_\nu|$.

Τέτοια συστήματα είναι γενικά δύσκολο να τα επιλύσει κανείς αριθμητικά.

Γενικεύσεις της μεθόδου του Euler

- Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}), \; n = 0, \dots, N, \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

$y'(t^{n+1}) = f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$

$y'(t^{n+1}) \approx \dfrac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$

$\dfrac{\overset{y^{n+1}}{y(t^{n+1})} - \overset{y^n}{y(t^n)}}{h} \underset{=}{\approx} f(t^{n+1}, \overset{y^{n+1}}{y(t^{n+1})})$

Ισχυρισμός: Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler είναι Α-ευσταθής.

- Δεν υπάρχει άμεση Α-ευσταθής μέθοδος.
- Δεν είναι όλες οι πεπλεγμένες μέθοδοι Α-ευσταθείς

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \; a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$N \in \mathbb{N}$, $h := \dfrac{b-a}{N}$, $t^n := a + nh$, $n = 0, \dots, N$

Μέθοδος του Euler:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n), \; n = 0, \dots, N-1, \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

$y'(t^n) = f(t^n, y(t^n))$

$y'(t^n) \approx \dfrac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$

$\Longrightarrow \dfrac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} \approx f(t^n, y(t^n))$

Αντικαθιστάμε το $y(t^n)$ με y^n, το $y(t^{n+1})$ με y^{n+1} και το $\approx$ με $=$, και παίρνουμε $\dfrac{y^{n+1} - y^n}{h} = f(t^n, y^n)$

$$\begin{cases} y' = \lambda y, \; t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$Re\lambda < 0$

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h\lambda y^{n+1}, \ n=0,1,\dots \\ y^0 = 1 \end{cases}$$

$$\underbrace{(1-\lambda h)}_{\neq 0} y^{n+1} = y^n \Rightarrow y^{n+1} = \frac{1}{1-\lambda h} y^n \qquad y^{n+1} = (1+\lambda h) y^n$$

$\hat{}$ Euler

$$\Rightarrow \boxed{y^n = \frac{1}{(1-\lambda h)^n}, \ n \in \mathbb{N}_0}$$

Αν $\mathrm{Re}\lambda h < 0$, τότε

$$|1-\lambda h| \geq |\mathrm{Re}(1-\lambda h)|$$
$$= 1 - \underbrace{(\mathrm{Re}\lambda)h}_{<0} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|1-\lambda h|} < 1$$

$$\Rightarrow |y^n| = \left(\frac{1}{|1-\lambda h|}\right)^n \leq 1$$

• Είναι η μέθοδος καλά ορισμένη;

(ύπαρξη και μοναδικότητα των προσεγγίσεων)

1η Περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz:

$$\exists L \geq 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$
$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Δεδομένης της y^n, θέλουμε να αποδείξουμε ύπαρξη και μοναδικότητα της y^{n+1}, δηλαδή ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης της εξίσωσης.

$(**)\ x = y^n + hf(t^{n+1}, x)$

$$g(x) := y^n + hf(t^{n+1}, x),\ x \in \mathbb{R}$$

Τότε η $(**)$ είναι ισοδύναμη με την $x = g(x)$, δηλαδή ότι η g έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

Τώρα, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$g(x_1) - g(x_2) = h\,[f(t^{n+1}, x_1) - f(t^{n+1}, x_2)]$$

$$\Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| = h\,|f(t^{n+1}, x_1) - f(t^{n+1}, x_2)|$$

$$\leq Lh|x_1 - x_2|.$$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\quad |g(x_1) - g(x_2)| \leq Lh|x_1 - x_2|$$

Για h αρκετά μικρό ώστε $Lh < 1$, η g είναι συστολή, άρα έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

2η Περίπτωση:

$$\forall t \in [a,b]\ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

$$[f(t, y_1) - f(t, y_2)](y_1 - y_2) \leq 0$$

Ισχυρισμός: Για κάθε h και δεδομένο το y^n, το y^{n+1} ορίζεται μοναδικά.

$(**) \Leftrightarrow x - y^n - hf(t^{n+1}, x) = 0.$

Ορίζουμε

$$g(x) = x - y^n - hf(t^{n+1}, x),\ x \in \mathbb{R}$$

και θα αποδείξουμε ότι η g έχει ακριβώς μία ρίζα.

- Μοναδικότητα ρίζας.

H g είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα έχει το πολύ μία ρίζα.

Έστω $x_1<x_2$ ρίζες της g.
Τότε $\underset{0}{\underset{\|}{g(x_1)}}<\underset{0}{\underset{\|}{g(x_2)}}$, άτοπο

- Ύπαρξη ρίζας.

H g είναι συνεχής

Για να αποδείξουμε ύπαρξη ρίζας,
αρκεί να αποδείξουμε ότι η g παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές.

- Για $\boxed{x>0}$ έχουμε $g(x)=x-y^n-hf(t^{n+1},x)>x\underbrace{-y^n-hf(t^{n+1},0)}_{\text{σταθ.}}$

$\longrightarrow\infty,\ x\longrightarrow\infty$

άρα για αρκετά μεγάλο x έχουμε $g(x)>0$.

- Για $\boxed{x<0}$ έχουμε

$$g(x)=x-y^n-hf(t^{n+1},x)<x-y^n-hf(t^{n+1},0)$$

$\longrightarrow-\infty,\ x\longrightarrow-\infty$

άρα $g(x)<0$ για $|x|$ αρκετά μεγάλη και $x<0$.

10/11/2011

Άσκηση 1.14 (Ανισότητα του Gronwall)

$$\phi'(t)\le\beta\phi(t),\ t\in[0,T]$$

ΝΔΟ:

$$\phi(t)\le\phi(0)e^{\beta t},\ t\in[0,T]$$

1ος Τρόπος:

$$\phi'(t)\le\beta\phi(t)\Rightarrow\underbrace{\int_0^t\phi'(s)ds}_{=\phi(t)-\phi(0)}\le\beta\int_0^t\phi(s)ds$$

$$\Rightarrow\phi(t)\le\underbrace{\phi(0)}_{a}+\beta\int_0^t\phi(s)ds,\ t\in[0,T]$$

Σύμφωνα με την (1.12) έχουμε

$$\phi(t)\le\phi(0)e^{\beta t},\ t\in[0,T]$$

δεν εφαρμόζεται και στην 1.12

2ος Τρόπος:

$$\phi'(t)\le\beta\phi(t)\Rightarrow\phi'(t)-\beta\phi(t)\le0\Rightarrow e^{-\beta t}[\phi'(t)-\beta\phi(t)]\le0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(e^{-\beta t}\phi(t)\right)'\le0,\ t\in[0,T]$$

$$\Rightarrow e^{-\beta t}\phi(t)\le\underbrace{\cancel{e^{-\beta 0}}}_{1}\phi(0)$$

φθίνουσα συνάρτηση

$$\Rightarrow\boxed{\phi(t)\le\phi(0)e^{\beta t},\ t\in[0,T]}$$

Άσκηση 2.7

Θεώρημα 2.2
(Εκτίμηση του σφάλματος
της μεθόδου του Euler
για συστήματα Σ.Δ.Ε)

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & , a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$y : [a,b] \to \mathbb{R}^m$$

$\|\cdot\|$ νόρμα στον $\mathbb{R}^m$

$\exists L > 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$

$$\|f(t,x) - f(t,\tilde{x})\| \le L\|x - \tilde{x}\|$$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n), & n = 0, \dots, N-1, \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

ΝΔΟ:

$$\max_{0 \le n \le N} \|y(t^n) - y^n\| \le \frac{M}{2L} C_1 \left(e^{L(b-a)} - 1\right) h$$

με

$$M := \max_{a \le t \le b} \|y''(t)\|_\infty$$

και C_1 τ.ώ $\forall x \in \mathbb{R}^m \ \|x\| \le C_1 \|x\|_\infty$

$$y_i^{n+1} = y_i^n + hf_i(t^n, y^n), \quad i = 1, \dots, m.$$

Επίσης, Taylor

$$y_i(t^{n+1}) = y_i(t^n) + h\underbrace{y_i'(t^n)}_{= f_i(t^n, y(t^n))} + \frac{h^2}{2} y_i''(\xi_{ni}), \quad i = 1, \dots, m.$$

Αφαιρώντας έχουμε

$$y_i(t^{n+1}) - y_i^{n+1} = y_i(t^n) - y_i^n + h[f_i(t^n, y(t^n)) - f_i(t^n, y^n)] + \frac{h^2}{2} y_i''(\xi_{n,i}), \quad i = 1, \dots, m$$

Άρα

$$y(t^{n+1}) - y^{n+1} = y(t^n) - y^n + h[f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)] + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} y_1''(\xi_{n1}) \\ \vdots \\ y_m''(\xi_{nm}) \end{pmatrix}$$

οπότε

$$\|y(t^{n+1}) - y^{n+1}\| \le \|y(t) - y^n\| + hL\|y(t^n) - y^n\| + \frac{h^2}{2} \left\| \begin{pmatrix} y_1''(\xi_{n1}) \\ \vdots \\ y_m''(\xi_{nm}) \end{pmatrix} \right\|$$

$$\le C_1 \left\| \begin{pmatrix} y_1''(\xi_{n1}) \\ \vdots \\ y_m''(\xi_{nm}) \end{pmatrix} \right\|_\infty \le$$

$$\le C_1 \max_{1 \le i \le m} \max_{a \le t \le b} |y_i''(t)| =$$

$$= C_1 M$$

Άρα

$$\boxed{\|y(t^{n+1}) - y^{n+1}\| \le (1 + Lh)\|y(t^n) - y^n\| + C_1 M \frac{h^2}{2}}$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται όπως στην εκτίμηση του σφάλματος στην περίπτωση εξισώσεων.

Άσκηση 2.8

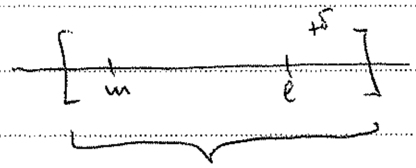
$$\begin{cases} y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$y \in C^2[a, b]$.

Έστω $m \le y(t) \le \ell$.

Έστω $\delta > 0$



Τοπική συνθήκη Lipschitz:

$\exists\, L \ge 0 \;\; \forall t \in [a,b] \;\; \forall y_1, y_2 \in [m-\delta, \ell+\delta]$

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

Εκτίμηση του σφάλματος της μεθόδου του Euler.

Απόδειξη

$$M := \max_{a \le t \le b} |y''(t)|$$

Έστω

$$h_0 > 0 \text{ τ.ω. } \frac{M}{2L}\left[e^{L(b-a)} - 1\right] h_0 < \delta.$$

Τότε

$$\forall h \in (0, h_0] \;\; \frac{M}{2L}\left[e^{L(b-a)} - 1\right] h < \delta.$$

Θα αποδείξουμε επαγωγικά:

$$(*) \quad y^i \in [m-\delta, \ell+\delta] \text{ και } |y(t^i) - y^i| \le \frac{M}{2L}\left[(1+Lh)^i - 1\right]h, \; i = 0, \dots, N$$

$i = 0$: ✓

$i = n \longrightarrow i = n+1$: $\quad y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n)$

$(n < N)$ $\quad y(t^{n+1}) = y(t^n) + h f(t^n, y(t^n)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$

$$\Rightarrow \; y(t^{n+1}) - y^{n+1} = y(t^n) - y^n + h\left[f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)\right] + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

$$\Rightarrow \; |y(t^{n+1}) - y^{n+1}| \le |y(t^n) - y^n| + h|f(t^n, \underbrace{y(t^n)}_{\in [m,\ell]}) - f(t^n, \underbrace{y^n}_{\in [m-\delta, \ell+\delta]})| + \frac{h^2}{2} M$$

$|y(t^{n+1})-y^{n+1}| \le (1+Lh)|y(t^n)-y^n| + \frac{h^2}{2}M$

$\le (1+Lh)\frac{M}{2L}[(1+Lh)^n-1]h+\frac{h^2}{2}M$

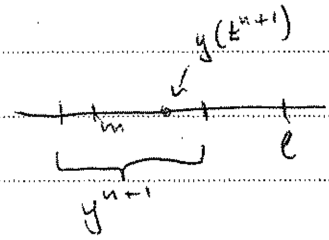
$= \frac{M}{2L}[(1+Lh)^{n+1}-1] - \cancel{Lh\frac{M}{2L}h} + \cancel{\frac{h^2}{2}M} =$

$= \frac{M}{2L}[(1+Lh)^{n+1}-1]h$

$|y(t^{n+1})-y^{n+1}| \le \frac{M}{2L}[(1+Lh)^{n+1}-1]h \le \frac{M}{2L}[(e^{Lh})^{n+1}-1]h = \frac{M}{2L}[e^{Lh(n+1)}-1]h$

$\le \frac{M}{2L}[e^{L(b-a)}-1]h < \delta$

$\Rightarrow y^{n+1} \in [m-\delta, \ell+\delta]$



<u>Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler</u>

$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

$y \in C^2[a,b]$

<u>Εκτίμηση σφάλματος:</u>

α) Η $f(t,\cdot)$ ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz

(εύκολο, θα το δείξουμε και αργότερα)

β) $\forall t \in [a,b]\ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}\ [f(t,y_1)-f(t,y_2)](y_1-y_2) \le 0$

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}) \ , n=0,\dots,N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hf(t^{n+1}, y(t^{n+1})) - \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

Με $\varepsilon^m := y(t^m) - y^m$, έχουμε

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n + h[f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) - f(t^{n+1}, y^{n+1})] - \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

Πολλαπλασιάζοντας με ε^{n+1} παίρνουμε

$$(\varepsilon^{n+1})^2 = e^n e^{n+1} + \underbrace{h[f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) - f(t^{n+1}, y^{n+1})] \cdot \overbrace{[y(t^{n+1}) - y^{n+1}]}^{=\varepsilon^{n+1}}}_{\leq 0}$$

$$- \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \varepsilon^{n+1}$$

$$\Rightarrow (\varepsilon^{n+1})^2 \leq \varepsilon^n \varepsilon^{n+1} - \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \varepsilon^{n+1}$$

$$\leq |\varepsilon^n| |\varepsilon^{n+1}| + \frac{h^2}{2} M |\varepsilon^{n+1}|$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}|^{\cancel{2}} \leq |\varepsilon^n| \cdot \cancel{|\varepsilon^{n+1}|} + \frac{h^2}{2} M \cancel{|\varepsilon^{n+1}|}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\varepsilon^{n+1}| \leq |\varepsilon^n| + \frac{h^2}{2} M}$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^n| \leq \underbrace{\cancel{|\varepsilon^0|}}_{0} + n \frac{h^2}{2} M \ , n=0,\dots,N$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^n| \leq n \frac{h^2}{2} M = \underbrace{nh}_{\leq b-a} \frac{M}{2} h$$

$$\Rightarrow \boxed{|\varepsilon^n| \leq \frac{b-a}{2} Mh}$$

Άρα $\max\limits_{0 \leq n \leq N} |\varepsilon^n| \leq \frac{b-a}{2} Mh$ ή $\boxed{\max\limits_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq \frac{b-a}{2} Mh}$

Μέθοδοι υψηλότερης τάξης

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \quad , a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

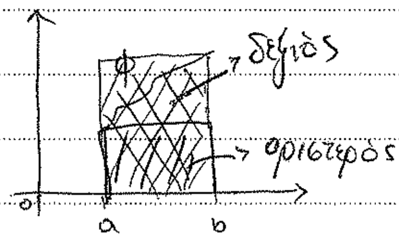
$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow$$

$$\underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt}_{y(t^{n+1}) - y(t^n)} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t^{n+1}) = y(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt}$$

Αριστερός τύπος του ορθογωνίου:

$$\int_a^b \phi(x)\,dx \approx (b-a)\,\phi(a)$$



$$y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + h f(t^n, y(t^n))$$

$$y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n)$$

(Euler)

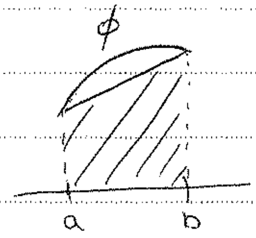
- Δεξιός τύπος του ορθογωνίου

$$y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + h f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

$$y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1})$$

(πεπλεγμένη Euler)

• Τύπος του τραπεζίου



$$\int_a^b \phi(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left[\phi(a)+\phi(b)\right]$$

$$y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + \frac{h}{2}\left[f(t^n, y(t^n)) + f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))\right]$$

$$\boxed{y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\right]}$$

• Μέθοδος του τραπεζίου
• πεπλεγμένη
• A-ευσταθής
• τάξη $p=2$.

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\right]$$

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^n + hf(t^n, y^n))\right]$$

• άμεση
• τάξη: $p=2$
• Όχι A-ευσταθής