Υπολογιστικά Μαθηματικά

20/10/2011

$$(*)\begin{cases} y' = f(t,y) & , a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Δεδομένα: $f : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής

$y_0 \in \mathbb{R}$

Ζητούμενο: $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη

Ύπαρξη και μοναδικότητα

α) $f(t,y) = p(t)y + q(t)$,

$p, q \in C[a,b]$

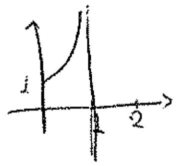
Γραμμική Δ.Ε

Τότε έχουμε ύπαρξη μιας μοναδικής λύσης του (*) και βρήκαμε και έναν τύπο για τη λύση.

β) **Παράδειγμα μη ύπαρξης λύσης**

$$\begin{cases} y' = y^2 & , 0 \le t \le 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$y(t) = \dfrac{1}{1-t}$ ικανοποιεί την αρχική συνθήκη και τη Δ.Ε στο $[0,1)$



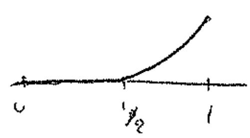
γ) **Παράδειγμα μη μοναδικότητας**

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} & , 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1η λύση: $y(t) = 0$, $0 \le t \le 1$

2η λύση:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \le t \le 1/2 \\ \dfrac{(t-1/2)^2}{4} & , 1/2 < t \le 1 \end{cases}$$



Ομαλότητα της y: Η y είναι προφανώς συνεχώς παραγωγίσιμη

για $t \in [0, 1/2)$ και $t \in (1/2, 1]$.

- y συνεχής στο $1/2$: $\lim_{t \uparrow 1/2} y(t) = 0 = \lim_{t \downarrow 1/2} y(t)$

- y' συνεχής στο $1/2$: $\lim_{t \uparrow 1/2} y'(t) = 0 = \lim_{t \downarrow 1/2} y'(t)$

Η y ικανοποιεί την αρχική συνθήκη και:

$$y'(t) = \begin{cases} 0 = \sqrt{|y(t)|} & \text{στο } [0, 1/2) \\ \dfrac{t - 1/2}{2} = \sqrt{\dfrac{(t-1/2)^2}{4}} = \sqrt{|y(t)|} \end{cases}$$

Θεώρημα (Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων της (*)).

Έστω $f \in C([a,b] \times \mathbb{R})$, η οποία επιπλέον ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz, ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t, δηλαδή

ολική

(**) $\left(\exists L > 0, \forall t \in [a,b] \; \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \; |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L|y_1 - y_2|. \right)$

Τότε το πρόβλημα (*) έχει ακριβώς μία λύση $y \in C^1[a,b]$.

$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\exists L > 0, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ |

Η (**) είναι πολύ περιοριστική

Υπόθεση: Η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς y.

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,\xi)\right|}_{\le L} |(y_1 - y_2)|$$

Η (**) ικανοποιείται, αν και μόνο αν

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| \le L \quad \forall t \in [a,b] \; \forall y \in \mathbb{R}.$$

$f(t,y) = y^2$ $\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| = 2|y| \to \mathbb{R}, \; y \to \infty$

$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = 2y$

1.2 Ευστάθεια (συνεχής εξάρτηση από τα αρχικά δεδομένα).

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{cases} z' = f(t,z), & a \le t \le b, \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

α) Η f ικανοποιεί την (**)

$$\varepsilon(t) := y(t) - z(t)$$

Αφαιρώντας τις 2 Δ.Ε, έχουμε

$$\varepsilon'(t) = f(t,y(t)) - f(t,z(t))$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\varepsilon(t)$ παίρνουμε

$$\varepsilon(t)\varepsilon'(t) = [f(t,y(t)) - f(t,z(t))]\ \varepsilon(t)$$

$$\left(\tfrac{1}{2}(\varepsilon(t)^2\right)' \le \underbrace{|f(t,y(t)) - f(t,z(t))|}_{\le L|\varepsilon(t)|} \cdot |\varepsilon(t)|$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\tfrac{1}{2}(\varepsilon(t))^2\right)' \le L(\varepsilon(t))^2}$$

$$\phi(t) := (\varepsilon(t))^2$$

Τότε $\frac{1}{2}\phi'(t) \le L\phi(t) \Rightarrow$

$$\phi'(t) \le 2L\phi(t) \Rightarrow$$

$$\boxed{\phi'(t) - 2L\phi(t) \le 0} \Rightarrow$$

$$e^{-2Lt}\phi'(t) - 2L e^{-2Lt}\phi(t) \le 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(e^{-2Lt}\phi(t)\right)' \le 0}$$

$$\Rightarrow e^{-2Lt}\phi(t) \le e^{-2La}\phi(a),\ t \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \phi(t) < e^{2L(t-a)}\phi(a)$$

Άρα

$$(\varepsilon(t))^2 \le e^{2L(t-a)}(e(a))^2$$

$$\Rightarrow |\varepsilon(t)| \le e^{L(t-a)}|\varepsilon(a)|$$

ή

$$|y(t) - z(t)| \le e^{L(t-a)}|y_0 - z_0|$$

$$\Rightarrow \underbrace{\max_{a \le t \le b} |y(t) - z(t)|}_{\|y-z\|_\infty} \le C^{L(b-a)}|y_0 - z_0|$$

$f(t,y)=\sqrt{y}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)=\frac{1}{2\sqrt{y}} \longrightarrow \infty, \ y\downarrow 0.$

Παράδειγμα f που ικανοποιούν την $(**)$:

- $f(t,y)=p(t)y+q(t)$, $p,q\in C[a,b]$

$|f_y(t,y)|=|p(t)|\leq \max\limits_{a\leq t\leq b}|p(t)|=L$

- $p(t,y)=p(t)\cdot \sin y$

$|f_y(t,y)|=|p(t)\cdot \cos y|\leq |p(t)|=L$

Θεώρημα: (Τοπική ύπαρξη και μοναδικότητα)

Έστω $c>0$ και $f\in C[a,b]\times[y_0-c,y_0+c]$ +

Αν η f πληροί στο $[a,b]\times[y_0-c,y_0+c]$ τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t, δηλαδή

$\exists L>0 \ \forall t\in[a,b] \ \forall y_1,y_2\in[y_0-c,y_0+c]$

$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\leq L|y_1-y_2|$,

τότε το $(*)$ ακριβώς μία λύση, τουλάχιστον στο $[a,b']$,

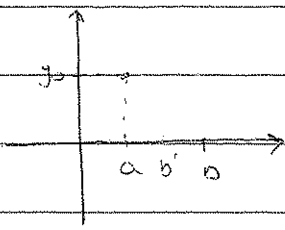
όπου με

$$A=\max_{\substack{a\leq t\leq b\\ y_0-c\leq y\leq y_0+c}} |f(t,y)|$$

έλαβε $b'=\min(b, a+\frac{c}{A})$.

25/10/2011

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$



$f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής

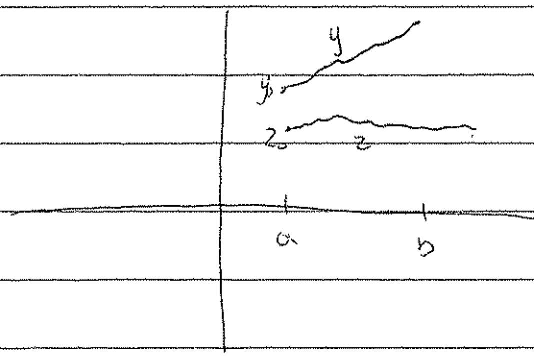
Ευστάθεια

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z' = f(t,z), & a \le t \le b, \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

1η Περίπτωση

$\exists\, L \geq 0 \ \ \forall t \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$



$$|y(t) - z(t)| \leq e^{L(t-a)} |y_0 - z_0|$$

$$\Rightarrow \boxed{\max_{a \le t \le b} |y(t) - z(t)| \leq e^{L(b-a)} |y_0 - z_0|}$$

2η Περίπτωση

$\forall t \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$[f(t,y_1) - f(t,y_2)] \cdot (y_1 - y_2) \leq 0$

Δηλ. $f(t,\cdot)$ φθίνουσα

$$\varepsilon(t) = y(t) - z(t)$$

Τότε (αφαίρεση κατά μέλη)

$$\varepsilon'(t) = f(t,y(t)) - f(t,z(t))$$

$$\Rightarrow \varepsilon(t) \cdot \varepsilon'(t) = \underbrace{[f(t,y(t)) - f(t,z(t))] \cdot [y(t) - z(t)]}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow \varepsilon(t) \cdot \varepsilon'(t) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left((\varepsilon(t))^2\right)' \leq 0 \quad \Rightarrow (\varepsilon(t))^2 \text{ φθίνουσα} \quad \Rightarrow (\varepsilon(t))^2 \leq (\varepsilon(a))^2 \ \ \forall t \in [a,b]$$

$$\Rightarrow |\varepsilon(t)| \leq |\varepsilon(a)|$$

$\Rightarrow |y(t) - z(t)| \leq |y_0 - z_0|$

$\Rightarrow \max\limits_{a \leq t \leq b} |y(t) - z(t)| \overset{1}{\leq} |y_0 - z_0|$

Συστήματα Σ.ΔΕ.

Έστω $\boxed{m \geq 1}$

Δεδομένα: $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$y_0 \in \mathbb{R}^m$

Ζητούμενο: $y : [a,b] \to \mathbb{R}^m$

$$(*) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \ a \leq t \leq b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Θεώρημα (Ύπαρξη και μοναδικότητα ~~για~~ λύσεων για Σ.ΔΕ.)

Έστω $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ συνεχής συνάρτηση,

η οποία πληροί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y,

ομοιόμορφα ως προς t, ως προς μία νόρμα $\|\cdot\|$ του $\mathbb{R}^m$,

$\exists L \geq 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^m$

$\|f(t,y) - f(t,\tilde{y})\| \leq L \|y - \tilde{y}\|.$

Τότε το πρόβλημα $(*)$ έχει ακριβώς μία λύση.

• Γραμμική Περίπτωση

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)\cdot y(t) + g(t), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$m=1$

$y'(t) = p(t)\cdot y(t) + q(t)$

με $A(t) \in \mathbb{R}^{m,m}$ και $g(t) \in \mathbb{R}^m$ συνεχείς.

$y'(t) = f(t, y(t))$

$y''(t) = 0 \Rightarrow y'(t) = c, \Rightarrow$

$\boxed{y(t) = c_1 t + c_2}$

$m \in \mathbb{N}$

$$(**)\begin{cases} y^{(m)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)), & a \le t \le b, \\ y^{(i)}(a) = y_i, & i = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

$y : [a,b] \to \mathbb{R}$

Ισχυρισμός: Το (**) μπορούμε να το γράψουμε στη μορφή (*)

Θέτουμε:

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Τότε

$$z'(t) = \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ \vdots \\ z_m'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(t) \\ y^{(m)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \\ f(t, z_1(t), \dots, z_m(t)) \end{pmatrix}$$

$$z(a) = \begin{pmatrix} z_1(a) \\ z_2(a) \\ \vdots \\ z_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(a) = y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{pmatrix}$$

↑

(δεδομένα από τις αρχικές συνθήκες)