# 3. Μέθοδοι των Runge–Kutta

## Ασκήσεις

**3.2** Αποδείξτε ότι η μέθοδος των Runge–Kutta που περιγράφεται από το μητρώο

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline 1 & \end{array}$$

έχει τάξη ακρίβειας ένα.

**3.3** Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών (3.1) και υποθέστε ότι η $f$ είναι αρκετά ομαλή στο $[a, b] \times \mathbb{R}$, και ότι η ίδια και κατάλληλες μερικές παράγωγοί της είναι φραγμένες. Προσδιορίστε όλες τις μεθόδους των Runge–Kutta της μορφής

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & \tau_2 \\ \hline b_1 & b_2 & \end{array} ,$$

οι οποίες έχουν τάξη ακρίβειας $p = 2$.

**3.8** Αποδείξτε ότι η μόνη μέθοδος RK με ένα στάδιο και τάξη ακρίβειας δύο είναι η (πεπλεγμένη) μέθοδος του μέσου (Παράδειγμα υπ' αριθμ. 3 στην παράγραφο 3.1).

**3.12** Αποδείξτε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη συνέπεια μιας μεθόδου των Runge–Kutta (3.2), για το πρόβλημα (3.1), είναι $b_1 + b_2 + \cdots + b_q = 1$.

**3.13** Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = 1, \quad 0 \le t \le 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Έστω $N \in \mathbb{N}, h := \frac{1}{N}$, και $y^N$ η προσέγγιση της λύσεως του προβλήματος αυτού στο σημείο $1$, την οποία δίνει μια μέθοδος των Runge–Kutta όταν εφαρμοσθεί στο πρόβλημα με βήμα $h$. Αν υποθέσουμε ότι

$$y^N \to 1 = y(1), \quad N \to \infty,$$

αποδείξτε ότι η μέθοδος των Runge–Kutta είναι συνεπής.
[*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 3.12.]

**3.14** Θεωρούμε τα $\zeta^{n,i}$ όπως ορίστηκαν στην (3.29). Αποδείξτε, για το πρόβλημα (3.1), υπό τις προϋποθέσεις της Άσκησης 3.3, ότι

$$\max_{n,i} |y(t^{n,i}) - \zeta^{n,i}| \le C\, h$$

και

$$\max_{n} |y(t^{n,i}) - \zeta^{n,i}| \le C\, h^2 \iff \sum_{j=1}^{q} a_{ij} = \tau_i\,, \quad i = 1, \dots, q.$$

**3.15** Είναι η μέθοδος των Runge–Kutta που περιγράφεται από το μητρώο

$$\begin{array}{ccc|c}
\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\
\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{3}\\
\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\\
\hline
\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} &
\end{array}$$

συνεπής και γιατί;

**3.19** Έστω $a = t^0 < t^1 < \cdots < t^N = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$, $h_n := t^{n+1} - t^n$, $n = 0, \dots, N-1$, και $h := \max_{0\le n\le N-1} h_n$. Αν η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \quad a \le t \le b,\\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

είναι αρκετά ομαλή, τότε για το σφάλμα $\varepsilon^n := y(t^n) - y^n$, $n = 0, \dots, N$, μιας μεθόδου των Runge–Kutta τάξεως $p$ ισχύει

$$|\varepsilon^{n+1}| \le (1 + C_1 h_n)\, |\varepsilon^n| + C_2\, h_n^{p+1}, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

με σταθερές $C_1$, $C_2$ ανεξάρτητες του $N$ και του διαμερισμού. Δεχόμενοι αυτό το γεγονός, αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C$, ανεξάρτητη του $h$, τέτοια ώστε

$$\max_{0\le n\le N} |\varepsilon^n| \le C\, h^p\,.$$

**3.24** Θεωρήστε τις ημιπεπλεγμένες μεθόδους RK (3.11) με παράμετρο $\mu \in \mathbb{R}$. Για ποιες τιμές του $\mu$ είναι οι μέθοδοι $A-$ευσταθείς; Ποια είναι η τάξη ακρίβειάς τους $p$, που δίνει η (3.104);

**3.25** Αποδείξτε ότι η μέθοδος (3.12) είναι $A-$ευσταθής. Αναπτύσσοντας την αντίστοιχη ρητή συνάρτηση $r$ σε δυναμοσειρά του $z$, προσδιορίστε την τάξη ακρίβειας $p$ που δίνει η (3.104) γι' αυτήν τη μέθοδο.

**3.30** α) Αποδείξτε ότι η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler και η πεπλεγμένη μέθοδος του μέσου είναι $B-$ευσταθείς. Αποδείξτε επίσης ότι οι ημιπεπλεγμένες μέθοδοι (3.11) είναι $B-$ευσταθείς για $\mu \geq 1/4$.
β) Αποδείξτε ότι η μέθοδος των Gauss–Legendre με δύο στάδια (3.12) είναι $B-$ευσταθής, με $m_{ij} = 0$.
γ) Αποδείξτε ότι η μέθοδος του τραπεζίου καθώς και η μέθοδος που αντιστοιχεί στο μητρώο

$$\begin{array}{cc|c} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{4} \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

είναι $A-$ευσταθείς, αλλά δεν ικανοποιούν τις συνθήκες αλγεβρικής ευστάθειας (3.123). (Μπορεί να αποδειχθεί ότι δεν είναι $B-$ευσταθείς.)

**3.31** Χρησιμοποιήστε το Πόρισμα 3.1 για να αποδείξετε ότι η τάξη ακρίβειας της μεθόδου των Runge–Kutta–Radau με μητρώο

$$\begin{array}{cc|c} \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\ \hline \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \end{array}$$

είναι τρία.

**3.40** Θεωρούμε μια μέθοδο των Runge–Kutta και την αντίστοιχη ρητή προσέγγιση $r$ της εκθετικής συνάρτησης, $r(z) = 1 + zb^T(I - zA)^{-1}\boldsymbol{e}$, βλ. την (3.99). Αποδείξτε ότι η μέθοδος είναι συνεπής, αν και μόνο αν $r(0) = r'(0) = 1$, βλ. την Άσκηση 3.12.

**3.41** Υποθέτουμε ότι μια μέθοδος των Runge–Kutta έχει τάξη ακρίβειας $p$. Αποδείξτε τότε ότι

$$b^T A^{\ell-1}\boldsymbol{e} = \frac{1}{\ell!}, \quad \ell = 1, \dots, p.$$

[*Υπόδειξη*: Με τους συμβολισμούς της προηγούμενης Άσκησης έχουμε

$$r(z) = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \big(b^T A^j \boldsymbol{e}\big) z^{j+1}.$$

Χρησιμοποιήστε την (3.104).]

**3.47** Δώστε ένα παράδειγμα πεπλεγμένης μεθόδου RK με αντίστοιχη ρητή προσέγγιση $r$ που δεν είναι είναι στοιχείο του πίνακα Padé του εκθετικού.
[*Υπόδειξη*: Θεωρήστε τη μέθοδο (3.11) για κατάλληλα $\mu$. (Η ρητή προσέγγιση $r$ δόθηκε λίγο πριν την (3.105).)]