

2. Η μέθοδος του Euler

Ασκήσεις

*2.5 Έστω $a = t^0 < t^1 < \dots < t^N = b$ ένας διαμερισμός του $[a, b]$. Υποθέστε ότι ο διαμερισμός είναι ημιμοιόμορφος, ότι υπάρχει δηλαδή θετική σταθερά μ , ανεξάρτητη του N , τέτοια ώστε

$$\min_{0 \leq n \leq N-1} h_n \geq \mu \max_{0 \leq n \leq N-1} h_n,$$

όπου $h_n := t^{n+1} - t^n$, $n = 0, \dots, N-1$. Θέστε

$$h := \max_{0 \leq n \leq N-1} h_n,$$

και διατυπώστε και αποδείξτε ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2.1 γι' αυτήν την περίπτωση.

*2.6 Έστω $a = t^0 < t^1 < \dots < t^N = b$ ένας οποιοσδήποτε διαμερισμός του $[a, b]$, $h_n := t^{n+1} - t^n$, $n = 0, \dots, N-1$, και

$$h := \max_{0 \leq n \leq N-1} h_n.$$

Διατυπώστε και αποδείξτε ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2.1 γι' αυτήν την περίπτωση.

[Υπόδειξη: Αποδείξτε κατ' αρχάς, όπως στη (2.7), ότι

$$|\varepsilon^{n+1}| \leq (1 + h_n L) |\varepsilon^n| + \frac{Mh}{2} h_n, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα και την $\varepsilon^0 = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} |\varepsilon^{n+1}| &\leq \frac{Mh}{2} \left[h_n + (1 + h_n L) h_{n-1} + (1 + h_n L) (1 + h_{n-1} L) h_{n-2} \right. \\ &\quad \left. + \dots + (1 + h_n L) (1 + h_{n-1} L) \dots (1 + h_1 L) h_0 \right] \\ &\leq \frac{Mh}{2} \left[h_n + e^{L(t^{n+1}-t^n)} (t^n - t^{n-1}) + e^{L(t^{n+1}-t^{n-1})} (t^{n-1} - t^{n-2}) \right. \\ &\quad \left. + \dots + e^{L(t^{n+1}-t^1)} (t^1 - t^0) \right] \\ &\leq \frac{Mh}{2} e^{L(b-a)} (h_n + h_{n-1} + \dots + h_0) = \frac{Mh}{2} e^{L(b-a)} (b-a). \end{aligned}$$

Αποδείξτε και χρησιμοποιήστε και την ανισότητα

$$e^{L(t^{n+1}-t^k)}(t^k - t^{k-1}) \leq \int_{t^{k-1}}^{t^k} e^{L(t^{n+1}-s)} ds$$

για να βελτιώσετε τη σταθερά στην προηγούμενη εκτίμηση.]

***2.7** Αποδείξτε το Θεώρημα 2.2.

[Υπόδειξη: Η εμφάνιση της σταθεράς C_1 στην εκτίμηση (2.22) οφείλεται στο γεγονός ότι η παράσταση του υπολοίπου του αναπτύγματος Taylor με την τιμή μιας κατάλληλης παραγώγου σε ένα ενδιάμεσο σημείο δεν ισχύει για διανυσματικές συναρτήσεις. Πράγματι, στη διανυσματική περίπτωση, η αντίστοιχη της σχέσης

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hy'(t^n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n),$$

της βαθμωτής περίπτωσης, είναι

$$y_i(t^{n+1}) = y_i(t^n) + hy'_i(t^n) + \frac{h^2}{2}y''_i(\xi_{ni}),$$

με $\xi_{ni} \in (t^n, t^{n+1})$. Συνεπώς, η αντίστοιχη της παράστασης (2.5) είναι στην προκειμένη περίπτωση

$$y_i(t^{n+1}) = y_i(t^n) + hf_i(t^n, y(t^n)) + \frac{h^2}{2}y''_i(\xi_{ni}).]$$

***2.8** Έστω ότι το πρόβλημα (1.1) έχει μοναδική λύση $y \in C^2[a, b]$, και έστω $m, \ell \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\forall t \in [a, b] \quad m \leq y(t) \leq \ell,$$

και $\delta > 0$. Αν αντί της (1.6) υποθέσουμε ότι ισχύει η συνθήκη του Lipschitz τοπικά, δηλαδή ότι

$$\exists L \geq 0 \quad \forall t \in [a, b] \quad \forall y_1, y_2 \in [m - \delta, \ell + \delta] \quad |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

(η οποία είναι μια πολύ χρήσιμη και ρεαλιστική συνθήκη), αποδείξτε ότι υπάρχει $h_0 > 0$ τέτοιο ώστε για $h \in (0, h_0]$ η μέθοδος του Euler για το πρόβλημα (1.1) με βήμα h (ομοιόμορφος διαμερισμός) δίνει προσεγγίσεις για τις οποίες ισχύει η εκτίμηση (2.4).

[Υπόδειξη: Υποθέστε ότι

$$\frac{M}{2L} [e^{L(b-a)} - 1] h_0 < \delta,$$

όπου

$$M := \max_{a \leq t \leq b} |y''(t)|,$$

και αποδείξτε επαγωγικά ότι $y^k \in [m - \delta, \ell + \delta]$, $k = 0, \dots, N$.]

***2.9** Θεωρήστε το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών για ένα 2×2 σύστημα Σ.Δ.Ε. με αγνώστους $x(t), y(t)$, $t \geq 0$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, & t \geq 0, \\ \frac{dy}{dt} = x, & t \geq 0, \\ x(0) = 1, & y(0) = 0. \end{cases}$$

- α) Αποδείξτε ότι ισχύει ο νόμος διατήρησης $x^2(t) + y^2(t) = 1$, $t \geq 0$.
- β) Θεωρήστε τις προσεγγίσεις (x^n, y^n) , $n \geq 0$, που παράγει η μέθοδος του Euler για το παραπάνω σύστημα για σταθερό $h > 0$. Αποδείξτε ότι $(x^n)^2 + (y^n)^2 \rightarrow \infty$, καθώς $n \rightarrow \infty$.
- γ) Θεωρήστε τις προσεγγίσεις (x^n, y^n) , $n \geq 0$, που παράγει η μέθοδος του τραπεζίου (2.58) γι' αυτό το σύστημα για σταθερό $h > 0$. Αποδείξτε ότι $(x^n)^2 + (y^n)^2 = 1$, για κάθε n , δηλαδή ότι η μέθοδος του τραπεζίου ικανοποιεί το διακριτό ανάλογο του συνεχούς νόμου διατήρησης του ερωτήματος α).
- δ) Τι μπορούμε να πούμε για την ποσότητα $(x^n)^2 + (y^n)^2$ για τις προσεγγίσεις x^n, y^n που παράγει η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler;

***2.10** Θεωρούμε τα προβλήματα αρχικών τιμών της Άσκησης 1.8 και υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη που αναφέρθηκε εκεί, δηλαδή η (2.50). Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h := (b-a)/N$ και $t^n := a + nh$, $n = 0, \dots, N$. Προσεγγίζουμε τις λύσεις των προβλημάτων αρχικών τιμών με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler, με βήμα h , και συμβολίζουμε με y^n και z^n τις αντίστοιχες προσεγγίσεις. Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \in \{0, \dots, N\}$, ισχύει

$$|y^n - z^n| \leq |y^0 - z^0|.$$

***2.11** Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t), & t \in [0, 1], \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t), & t \in [0, 1], \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler, χρησιμοποιώντας έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[0, 1]$ με βήμα h . Αποδείξτε, με τους συνηθισμένους συμβολισμούς, ότι $(x^{n+1})^2 +$

$(y^{n+1})^2 \leq (x^n)^2 + (y^n)^2$. [Συγκρίνετε με την Άσκηση 1.26.]

***2.12** Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών της Άσκησης 1.25 με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler, με βήμα h . Συμβολίζουμε με y^n την προσέγγιση της $y(t^n)$, $t^n = nh$. Αποδείξτε ότι $\|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|$, $n \in \mathbb{N}_0$. Στην προκειμένη περίπτωση η Ευκλείδεια νόρμα των προσεγγίσεων φθίνει, δηλαδή η μέθοδος μιμείται την αντίστοιχη ιδιότητα του συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Αποδείξτε επίσης ότι και η πεπλεγμένη μέθοδος του μέσου, βλ. την (3.9) στο επόμενο κεφάλαιο, (ή ισοδύναμα η μέθοδος του τραπεζίου) έχει την ίδια ιδιότητα. [Υπόδειξη: Στην περίπτωση της πεπλεγμένης μεθόδου του Euler πάρτε στο βήμα της αριθμητικής μεθόδου που μας δίνει το y^{n+1} συναρτήσει του y^n το εσωτερικό γινόμενο με y^{n+1} . Στην περίπτωση της μεθόδου του μέσου πάρτε το εσωτερικό γινόμενο με $y^{n+1} + y^n$.]

***2.13** Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών της Άσκησης 1.28 με τη μέθοδο του μέσου (ή ισοδύναμα με τη μέθοδο του τραπεζίου) με βήμα h . Αποδείξτε ότι οι προσεγγίσεις έχουν την ίδια Ευκλείδεια νόρμα, $\|y^n\| = \|y_0\|$, $n \geq 0$.

***2.14** Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών της Άσκησης 1.27 με τη μέθοδο του μέσου (ή με τη μέθοδο του τραπεζίου· στην προκειμένη περίπτωση οι δύο αυτές μέθοδοι συμπίπτουν), με βήμα h . Συμβολίζουμε με y^n την προσέγγιση της $y(t^n)$, $t^n = nh$. Αποδείξτε ότι οι προσεγγίσεις έχουν την ίδια Ευκλείδεια νόρμα, $\|y^n\| = \|y_0\|$, δηλαδή ότι στην προκειμένη περίπτωση η μέθοδος μιμείται την αντίστοιχη ιδιότητα του συστήματος διαφορικών εξισώσεων.

[Υπόδειξη: Πάρτε στο βήμα της αριθμητικής μεθόδου που μας δίνει το y^{n+1} συναρτήσει του y^n το εσωτερικό με $y^{n+1} + y^n$ και χρησιμοποιήστε την υπόδειξη που δόθηκε στην Άσκηση 1.27.]

***2.15** Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = -e^y, & t \in [0, 1], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler, με βήμα h . Αποδείξτε ότι οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

***2.16** Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & t \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler με βήμα h . Για $\lambda < 0$ (σημειώστε ότι σ' αυτή την περίπτωση ικανοποιείται η (2.50)) οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες, όπως διαπιστώνει κανείς αμέσως. Για $\lambda > 0$ οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες για h αρκετά μικρό, βλ. και

τη σχετική συζήτηση μεταξύ των σχέσεων (2.50) και (2.57). Βεβαιωθείτε ότι στη δεύτερη περίπτωση, για $h = 1/\lambda$ οι προσεγγίσεις δεν είναι καλά ορισμένες, για να πεισθείτε ότι κάποια συνθήκη είναι απαραίτητη.

***2.17** Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (1.1) και υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τη (2.50). Διακριτοποιούμε το πρόβλημά μας με τη μέθοδο του μέσου, βλ. την (3.9) στο επόμενο κεφάλαιο, θεωρώντας έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[a, b]$. Αποδείξτε ότι οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

[Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι, δεδομένου του y^n , το $x^* = \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})$ είναι καλά ορισμένο.]

***2.18** Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f'(x) \leq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x , $x \in \mathbb{R}$. Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), & t \in [a, b], \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

με τη μέθοδο του τραπεζίου, θεωρώντας έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[a, b]$. Αποδείξτε ότι οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

***2.19** Έστω $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = -(y(t))^3 + \varphi(t), & t \in [0, 1], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

με τη μέθοδο του τραπεζίου, θεωρώντας έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[0, 1]$ με βήμα h . Αποδείξτε ότι οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

***2.20** Προσδιορίστε την περιοχή απόλυτης ευστάθειας (στο μιγαδικό επίπεδο) της μεθόδου του τραπεζίου (2.58) και το διάστημα απόλυτης ευστάθειας της μεθόδου (2.59).

***2.21** (Απόλυτη ευστάθεια στον φανταστικό άξονα.) Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών για την $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$

$$\begin{cases} y' = i \mu y, & t \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

όπου μ πραγματική σταθερά, διάφορη του μηδενός. Προφανώς, το πρόβλημα έχει τη λύση $y(t) = e^{i\mu t}$, για την οποία ισχύει $|y(t)| = 1$, για κάθε $t \geq 0$.

Γι' αυτό το πρόβλημα θεωρήστε

- α) Τη μέθοδο του Euler.
- β) Την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler.
- γ) Τη μέθοδο του τραπεζίου (2.58).

Ποια από τις τρεις αυτές μεθόδους θα επιλέγατε για την αριθμητική επίλυση του παραπάνω προβλήματος και γιατί;

***2.32** (Διακριτή ανισότητα του Gronwall, αντίστοιχη της διαφορικής μορφής: ομοιόμορφος διαμερισμός.) Έστω $T > 0$, $N \in \mathbb{N}$ και $h := \frac{T}{N}$. Αν $\alpha_0, \dots, \alpha_N$ και $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{N-1}$ μη αρνητικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε με $\gamma > 0$

$$\alpha_{n+1} \leq (1 + \gamma h)\alpha_n + h\varepsilon_n, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

αποδείξτε ότι

$$\max_{1 \leq n \leq N} \alpha_n \leq e^{\gamma T} \alpha_0 + \frac{1}{\gamma} e^{\gamma T} \max_{0 \leq n \leq N-1} \varepsilon_n.$$

***2.33** (Διακριτή ανισότητα του Gronwall, αντίστοιχη της διαφορικής μορφής: μη ομοιόμορφος διαμερισμός.) Έστω $T > 0$, $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$ ένας διαμερισμός του $[0, T]$, $h_n := t^{n+1} - t^n$, $n = 0, \dots, N-1$. Αν $\alpha_0, \dots, \alpha_N$ και $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{N-1}$ μη αρνητικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε με $\gamma > 0$

$$\alpha_{n+1} \leq (1 + \gamma h_n)\alpha_n + h_n \varepsilon_n, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

αποδείξτε ότι

$$\max_{1 \leq n \leq N} \alpha_n \leq e^{\gamma T} \alpha_0 + \int_0^T e^{\gamma(T-s)} ds \max_{0 \leq n \leq N-1} \varepsilon_n,$$

βλ. την Άσκηση 2.6.

***2.34** (Διακριτή ανισότητα του Gronwall, αντίστοιχη της ολοκληρωτικής μορφής.) Έστω $T > 0$, $N \in \mathbb{N}$ και $h := \frac{T}{N}$. Αν $\alpha_0, \dots, \alpha_N$ και E μη αρνητικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε με $\gamma > 0$ να ισχύει

$$\alpha_{n+1} \leq E + \gamma h \sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

αποδείξτε ότι

$$\max_{1 \leq n \leq N} \alpha_n \leq C(h\alpha_0 + E)$$

με μια σταθερά C ανεξάρτητη του h .

[Υπόδειξη: Έστω $\varphi_n := \gamma h \sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell$. Τότε $\varphi_{n+1} - \varphi_n = \gamma h \alpha_{n+1}$, συνεπώς

$$\varphi_{n+1} \leq \gamma h E + (1 + \gamma h)\varphi_n, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 2.32 για να εκτιμήσετε τα φ_n , και την

$$\alpha_{n+1} \leq E + \varphi_n$$

για να εκτιμήσετε τα α_n .]