1. Προβλήματα αρχικών τιμών

Ασκήσεις

1.3 Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|}\,, \quad 0 \le t \le 2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι για το πρόβλημα αυτό ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1.2 για κατάλληλα c και L. Προσδιορίστε τη λύση y με τη μέθοδο του χωρισμού μεταβλητών.

1.4 Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών (1.4). Ελέγξτε ότι το Θεώρημα 1.2 εξασφαλίζει ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης του (1.4) τουλάχιστον σ' ένα διάστημα της μορφής $[0, b']$. Επειδή η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[1-c, 1+c]$, μελετήστε το b' ως συνάρτηση του c.

1.6 Έστω $t^\star \in (0,1)$. Προσδιορίστε μια μη μηδενική σταθερά c τέτοια ώστε η συνάρτηση $y : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$y(t) := \begin{cases} 0, & 0 \le t \le t^\star, \\ c(t-t^\star)^2, & t^\star < t \le 1, \end{cases}$$

να αποτελεί λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (1.5). [Σημειώνουμε ότι για $t^\star = 1/2$ μια τέτοια λύση δόθηκε στη θεωρία.]

***1.8** Έστω $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\forall t \in [a,b] \ \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad \big(f(t,y_1) - f(t,y_2)\big)(y_1 - y_2) \le 0.$$

(Δηλαδή, για κάθε σταθερή τιμή t της πρώτης μεταβλητής, η συνάρτηση $f(t,\cdot)$ είναι φθίνουσα.) Έστω y και z οι λύσεις των προβλημάτων αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \quad t \in [a,b], \\ y(a) = y_0, \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} z' = f(t,z), \quad t \in [a,b], \\ z(a) = z_0, \end{cases}$$

αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι, για κάθε $t \in [a,b]$, ισχύει

$$|y(t) - z(t)| \le |y_0 - z_0|.$$

***1.9** Θεωρούμε τα προβλήματα αρχικών τιμών της Άσκησης 1.8, υποθέτοντας αυτή τη φορά ότι η συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\forall t \in [a, b] \ \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad \big(f(t, y_1) - f(t, y_2)\big)(y_1 - y_2) \le \nu(y_1 - y_2)^2,$$

για κάποια σταθερά ν. (Σημειώνουμε ότι για $\nu = 0$ η παρούσα συνθήκη συμπίπτει με εκείνη στην προηγούμενη Άσκηση.) Συνθήκες αυτής της μορφής αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως *μονόπλευρες* συνθήκες του Lipschitz. Αποδείξτε ότι, για κάθε $t \in [a, b]$, ισχύει

$$|y(t) - z(t)| \le \mathrm{e}^{\nu(t-a)}|y_0 - z_0|.$$

***1.10** Οι Ασκήσεις 1.8 και 1.9 γενικεύονται και για συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Η γενίκευση της Άσκησης 1.8 είναι: Έστω $f : [a, b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή της,

$$\forall t \in [a, b] \ \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m \quad \big(f(t, y_1) - f(t, y_2), y_1 - y_2\big) \le 0.$$

Έστω y και z οι λύσεις των προβλημάτων αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & t \in [a, b], \\ y(a) = y_0, \end{cases} \qquad \text{και} \qquad \begin{cases} z' = f(t, z), & t \in [a, b], \\ z(a) = z_0, \end{cases}$$

αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι, για κάθε $t \in [a, b]$, ισχύει

$$\|y(t) - z(t)\| \le \|y_0 - z_0\|.$$

Συμβολίσαμε εδώ με $\big(\cdot, \cdot\big)$ και $\|\cdot\|$ το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο και την Ευκλείδεια νόρμα, αντίστοιχα, στον $\mathbb{R}^m$.

***1.12** (Η ανισότητα του Gronwall σε ολοκληρωτική μορφή.) Έστω φ μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, T]$, και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \ge 0$. Αν ισχύει

$$\varphi(t) \le \alpha + \beta \int_0^t \varphi(s)\, ds \quad \forall t \in [0, T],$$

αποδείξτε ότι

$$\varphi(t) \le \alpha\, \mathrm{e}^{\beta t} \quad \forall t \in [0, T].$$

[*Υπόδειξη*: Θεωρήστε ένα θετικό ε και αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\psi, \psi(t) := (\alpha + \varepsilon)\, \mathrm{e}^{\beta t},\ t \in [0, T]$, ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση

$$\psi(t) = \alpha + \varepsilon + \beta \int_0^t \psi(s)\, ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Προφανώς $\varphi(0) < \psi(0)$. Έστω t_0 ο μικρότερος αριθμός στο διάστημα $[0,T]$ για τον οποίον $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$. Αποδείξτε ότι αυτό δεν είναι δυνατόν, γιατί οδηγεί στη σχέση $\varphi(t_0) < \psi(t_0)$.]

***1.14** (Η ανισότητα του Gronwall σε διαφορική μορφή.) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση φ της Άσκησης 1.12 είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,T]$ και ικανοποιεί την ανισότητα

$$\varphi'(t) \le \beta\varphi(t) \quad \forall t \in [0,T].$$

Αποδείξτε ότι

$$\varphi(t) \le \varphi(0)\,\mathrm{e}^{\beta t} \quad \forall t \in [0,T].$$

[*Υπόδειξη*: Αποδείξτε ότι

$$\varphi(t) \le \varphi(0) + \beta \int_0^t \varphi(s)\,ds \quad \forall t \in [0,T]$$

και χρησιμοποιήστε την Άσκηση 1.12. Εναλλακτικός τρόπος απόδειξης: Γράψτε τη διαφορική ανίσωση στη μορφή

$$\big(\mathrm{e}^{-\beta s}\varphi(s)\big)' \le 0$$

και ολοκληρώστε από 0 μέχρι t.]

***1.25** Έστω $M \in \mathbb{R}^{m,m}$ ένας *μη θετικά* ορισμένος πίνακας, $(Mx, x) \le 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = My(t), & t \ge 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η Ευκλείδεια νόρμα $\|y(\cdot)\|$ είναι φθίνουσα συνάρτηση.

***1.26** Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t), & t \ge 0, \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t), & t \ge 0, \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $[x(\cdot)]^2 + [y(\cdot)]^2$ είναι φθίνουσα.
[*Υπόδειξη*: Ο πίνακας $\left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ είναι αρνητικά ορισμένος. Βλ. την Άσκηση 1.25.]

***1.27** Έστω $M \in \mathbb{R}^{m,m}$ ένας *αντισυμμετρικός* πίνακας, δηλαδή τέτοιος ώστε για τα στοιχεία του να ισχύει $M_{ij} = -M_{ji}$, $i,j = 1,\dots,m$. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = My(t), & t \ge 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η Ευκλείδεια νόρμα $\|y(\cdot)\|$ είναι σταθερή συνάρτηση, $\|y(t)\| = \|y(0)\|$, για κάθε $t \geq 0$.
[*Υπόδειξη*: Αποδείξτε ότι $(Mx, x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$. Πάρτε τώρα στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων το εσωτερικό γινόμενο με $y(t)$ και χρησιμοποιήστε την προαναφερθείσα ιδιότητα.]