$1^{\underline{\text{ο}}}$ **Παράδειγμα.** Ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$I_n := \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{x-1}\,dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

για αρκετά μεγάλο n.

Ιδιότητες:

$$0 < I_{n+1} < I_n \leqslant \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1},$$

δηλαδή η ακολουθία $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι **γνησίως φθίνουσα** και **μηδενική**.

Αναδρομικός τύπος:

$$I_n = 1 - nI_{n-1}, \quad n \geqslant 2, \quad I_1 = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

$1^{\underline{\text{ος}}}$ **Αλγόριθμος.** Προσεγγίζουμε το I_1 με έναν αριθμό $\widetilde{I}_1$, και υπολογίζουμε τα $\widetilde{I}_n$ αναδρομικά:

$$\begin{cases} \widetilde{I}_n = 1 - n\widetilde{I}_{n-1}, & n \geqslant 2, \\ \widetilde{I}_1 & \text{δεδομένο.} \end{cases}$$

Προφανώς

$$\boxed{I_n - \widetilde{I}_n = -n(I_{n-1} - \widetilde{I}_{n-1})},$$

δηλαδή το σφάλμα πολλαπλασιάζεται σε κάθε βήμα επί $-n$.

Αυτός είναι ένας **ασταθής** αλγόριθμος. Η **αστάθεια** οφείλεται στον παράγοντα n. Σε κάθε βήμα του αλγορίθμου τα σφάλματα διογκώνονται και αλλοιώνουν τελείως τα αποτελέσματα.

Ασταθής Αλγόριθμος (απλή ακρίβεια)

$$I_n = 1 - n\,I_{n-1}$$

n	$\widetilde{I}_n$
1	0.367879
2	0.264242
3	0.207274
4	0.170904
5	0.145480
6	0.127120
7	0.110160
8	0.118720 ;
9	−0.068480 ; !

$$\varepsilon_n = \widetilde{I}_n - I_n, \quad \varepsilon_n = (-1)^{n-1}\,n!\,\varepsilon_1$$

$$\varepsilon_1 \approx -4.4 \cdot 10^{-7}, \quad \varepsilon_9 = 9!\,\varepsilon_1 \approx -0.16$$

Ασταθής Αλγόριθμος (απλή ακρίβεια)

$$I_n = 1 - n I_{n-1}$$

n	$\widetilde{I}_n$	
1	0.367879	
2	0.264242	
3	0.207274	
4	0.170904	
5	0.145480	
6	0.127120	
7	0.110160	
8	0.118720	;
9	−0.068480	; !
10	1.672874	
11	−17.401619	
12	209.819427	
13	−2726.652588	
14	38174.136719	
15	−572611.062500	

Ασταθής Αλγόριθμος (διπλή ακρίβεια)

$$I_n = 1 - n\,I_{n-1}$$

n	$\tilde{I}_n$	
1	0.367879	
2	0.264242	
3	0.207274	
4	0.170904	
5	0.145480	
6	0.127120	
7	0.110160	
8	0.118720	;
9	−0.068480	; !
10	1.684800	
11	−17.532800	
12	211.393600	
13	−2747.116799	
14	38460.635199	
15	−576908.527985	

$2^{\underline{\text{ος}}}$ **Αλγόριθμος.** Για αρκετά μεγάλο m, προσεγγίζουμε το I_m με έναν αριθμό $\widetilde{I}_m$. Αν επιλέξουμε $\widetilde{I}_m = 0$, τότε το αρχικό σφάλμα είναι το πολύ $1/(m+1)$,

$$|I_m - \widetilde{I}_m| \leqslant \frac{1}{m+1}.$$

(Καλύτερη επιλογή: $\widetilde{I}_m = 1/[2(m+1)]$. Τότε, $|I_m - \widetilde{I}_m| \leqslant \frac{1}{2(m+1)}$.)

Υπολογίζουμε προσεγγίσεις $\widetilde{I}_{m-1}, \widetilde{I}_{m-2}, \dots, \widetilde{I}_\ell$ αναδρομικά:

$$\widetilde{I}_{n-1} = \frac{1-\widetilde{I}_n}{n}, \quad n = m, m-1, \dots, \ell+1.$$

Προφανώς

$$\boxed{I_{n-1} - \widetilde{I}_{n-1} = -\frac{I_n - \widetilde{I}_n}{n}},$$

δηλαδή το σφάλμα διαιρείται σε κάθε βήμα με $-n$.

Ο αλγόριθμος αυτός είναι **ευσταθής**. Σε κάθε βήμα του αλγορίθμου τα σφάλματα **καταστέλλονται**.

Αν, π.χ., θέσουμε $\widetilde{I}_{20} = 0$, τότε το σφάλμα είναι κατ' απόλυτο τιμή μικρότερο του $1/21$.

Ευσταθής Αλγόριθμος (απλή ακρίβεια)

$$I_{n-1} = (1 - I_n)/n$$

n	$\widetilde{I}_n$
20	0.0000000
19	0.0500000
18	0.0500000
17	0.0527778
16	0.0557190
15	0.0590176
14	0.0627322
13	0.0669477
12	0.0717733
11	0.0773522
10	0.0838771
9	0.0916123
8	0.1009320

$$\varepsilon_n = (-1)^{m-n} \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots m} \varepsilon_m$$

2$\underline{\text{ο}}$ Παράδειγμα. Προσέγγιση του π με τη μέθοδο του Αρχιμήδη.

Έστω

$$y_n = 2^n \, \sin\frac{\pi}{2^n}\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Για $n \geqslant 2$, το $2y_n$ είναι η περίμετρος του εγγεγραμμένου στον μοναδιαίο κύκλο κανονικού πολυγώνου με 2^n πλευρές.

Ιδιότητες: $y_1 = 2$ και η ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι **γνησίως αύξουσα** και **συγκλίνει** στο π.

1$\underline{\text{ος}}$ Αλγόριθμος.

$$\begin{cases} y_{n+1} = 2^{n+1}\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}\,\right)}, & n = 1, 2, \ldots, \\ y_1 = 2. \end{cases}$$

Ο αλγόριθμος αυτός είναι **ασταθής**. Η **αστάθεια** οφείλεται στην **αφαίρεση σχεδόν ίσων αριθμών**.

Ασταθής Αλγόριθμος (απλή ακρίβεια)

$$\pi = 3.141592653590$$

$$y_{n+1} = 2^{n+1}\sqrt{\frac{1}{2}\Big(1 - \sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}\,\Big)}$$

n	$\tilde{y}_n$
1	2.
2	2.828427076340
3	3.061467409134
4	3.121444463730
5	3.136546134949
6	3.140333414078
7	3.141285657883
8	3.141518831253
9	3.141207933426
10	3.142451286316
11	3.142451286316
12	3.162277698517
13	3.162277698517
14	2.828427076340
15	0.000000000000

Ασταθής Αλγόριθμος (διπλή ακρίβεια)

$$\pi = 3.141592653590$$

$$y_{n+1} = 2^{n+1}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}\right)}$$

n	$\tilde{y}_n$
1	2.
2	2.828427124746
3	3.061467458921
4	3.121445152258
5	3.136548490546
16	3.141592645321
23	3.141829681889
24	3.142451272494
25	3.142451272494
26	3.162277660168
27	3.162277660168
28	3.464101615138
29	4.000000000000
30	0.000000000000

2$^{\underline{\text{ος}}}$ Αλγόριθμος.

$$\begin{cases} y_{n+1} = \sqrt{\dfrac{2}{1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}}}\, y_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ y_1 = 2. \end{cases}$$

Ο αλγόριθμος αυτός είναι **ευσταθής**.

Ευσταθής Αλγόριθμος (απλή ακρίβεια)

$$\pi = 3.141592653590$$

$$y_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}}}\, y_n$$

n	$\tilde{y}_n$
1	2.
2	2.828427076340
3	3.061467409134
4	3.121444940567
5	3.136548280716
6	3.140331029892
7	3.141277074814
8	3.141513347626
9	3.141572475433
10	3.141587018967
11	3.141590833664
12	3.141591548920
13	3.141591548920

Ευσταθής Αλγόριθμος (διπλή ακρίβεια)

$$\pi = 3.141592653590$$

$$y_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}}}\, y_n$$

n	$\tilde{y}_n$
1	2.
2	2.828427124746
3	3.061467458921
4	3.121445152258
5	3.136548490546
10	3.141587725277
11	3.141591421511
24	3.141592653585
25	3.141592653589
26	3.141592653589
27	3.141592653590
28	3.141592653590