4ο κεφαλαιο

Παρεμβολή.

Η παρεμβολή είναι ειδος τρόπος προσέγγισης συναρτήσεων με απλούστερες συναρτήσεις. που έχουν διάφορες επιθυμητές ιδιότητες, όπως:

- οι τιμές τους υπολογίζονται εύκολα
- παραγωγίζονται και ολοκληρώνονται εύκολα κλ.π

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής και $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ανα δύο διαφορετικά μεταξύ τους. του πεδίου ορισμού της f στα οποία είναι γνωστές οι τιμές της f

Στην παρεμβολή Lagrange ζητείται συνάρτηση ϕ από ένα προκαθορισμένο σύνολο συναρτήσεων των n ϕ να παρεμβάλλεται ~~στην f~~ στα σημεία $(x_i, f(x_i))$ για $i=0,\ldots,n$, δηλαδή να ισχύει.

$$\phi(x_i) = f(x_i), \quad i=0,\ldots,n$$

Με άλλα λόγια ζητείται το γράφημα της ϕ να διέρχεται από τα σημεία $(x_i, f(x_i))$, $i=0,\ldots,n$

Στην παρεμβολή Hermite ζητάμε επί πλέον οι τιμές παραγώγων της ϕ να συμπίπτουν με αντίστοιχες της f.

Η παρεμβολή γίνεται συνήθως με πολυώνυμα, με κατά τμήματα πολυωνυμικές συναρτήσεις ή με ρητές συναρτήσεις (πηλίκα πολυωνύμων)

Πολυωνυμική παρεμβολή:

Θεώρημα (Πολυωνυμική παρεμβολή Lagrange)
Έστω $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά σημεία μεταξύ τους, και $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Τότε, υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n (γράφουμε $p \in \mathbb{P}_n$) τ.ω

$$\circledast \quad p(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Απόδειξη: Γράφουμε το p στη μορφή

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

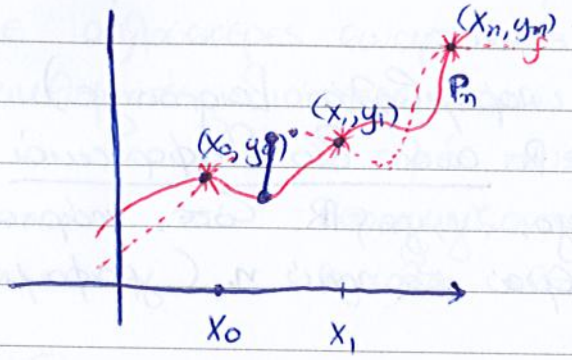
με αγνώστους συντελεστές $a_0, \dots, a_n$ οπότε το $\circledast$ είναι ένα γραμμικό σύστημα (ως προς τα $a_0, \dots, a_n$) με $n+1$ εξισώσεις και $n+1$ αγνώστους.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο πίνακας αυτού του συστήματος είναι αντιστρέψιμος.
Το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα είναι:

$$q(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n \quad q \in \mathbb{P}_n$$

Το q είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n με
<u>$n+1$</u> ρίζες, οπότε μηδενίζεται ταυτοτικά.

<u>Συμπέρασμα</u>, Το ⊛ έχει <u>ακριβώς μία</u> λύση.



Αν f είναι μια συνάρτηση και $p \in \mathbb{P}_n$
τ.ω

$$p(x_i) = \underbrace{f(x_i)}_{=y_i}, \quad i = 0, \ldots, n$$

τότε λέμε ότι το p παρεμβάλλεται στην f
στα σημεία $x_0, \ldots, x_n$. Το p λέγεται
πολυώνυμο <u>παρεμβολής</u> της f στα $x_0, \ldots, x_n$

<u>Θεώρημα</u> (Παράσταση του σφάλματος παρεμβολής)

Έστω $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^{n+1}[a,b]$, $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$
ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, και $p \in \mathbb{P}_n$ το
πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_0, \ldots, x_n$
δηλαδή,

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n$$

Τότε ισχύει

$$\forall x \in [a,b] \quad \exists \underset{\xi(x)}{\underset{\shortparallel}{\xi}} \in (a,b) \quad f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Απόδειξη

- $x \in \{x_0, \dots, x_n\}$, τότε η ζητούμενη παράσταση ισχύει για όλα τα ξ

- $x \in [a,b]$, $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$
  (σταθερό το x)

Θεωρούμε τις συναρτήσεις
$$\Phi(t) := \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$$
και
$$\varphi(t) = f(t) - p(t) - \underbrace{\frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)}}_{\text{αριθμός}} \cdot \Phi(t)$$

για $t \in [a, b]$.

Έχουμε ότι $\varphi \in C^{n+1}[a, b]$.
Επίσης,
$$\varphi(x_i) = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(x_i) - p(x_i)}} - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} \cdot \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\Phi(x_i)}} = 0$$
$i = 0, \dots, n$

Επιπλέον
$$\varphi(x) = f(x) - p(x) - \frac{f(x) - p(x)}{\cancel{\Phi(x)}} \cdot \cancel{\Phi(x)} = 0$$

Συμπέρασμα, Η φ έχει στο $[a, b]$ τουλάχιστον $n+2$ ρίζες.

Σύμφωνα με το Θεώρημα του Rolle:
Η φ' έχει στο (a, b) τουλάχιστον $n+1$ ρίζες.
Η φ'' έχει τουλάχιστον n ρίζες
$\vdots$
Η $\varphi^{(n+1)}$ έχει τουλάχιστον 1 ρίζα.

Άρα υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$

Τώρα

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \cancel{p^{(n+1)}(t)}^{\,0} - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} \cdot \Phi^{(n+1)}(t)$$

$(n+1)!$

$$\Phi(t) = \prod_{i=0}^{n}(t-x_i) = t^{n+1} + q_n(t)$$

$$\Rightarrow \Phi^{(n+1)}(t) = (n+1)! + 0$$

Επομένως,

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0 \Rightarrow f^{(n+1)}(\xi) = \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} \cdot (n+1)!$$

$\boxed{5\text{-}05\text{-}17}$

Παρεμβολή

Θεώρημα (Παράσταση του σφάλματος παρεμβολής)
Έστω $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^{n+1}[a,b]$, $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά σημεία, και $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω

$$p(x_i) = f(x_i) \quad , i = 0, \dots, n$$

Τότε,

$$\forall x \in [a,b] \ \exists \ \xi \in (a,b) \quad \text{“}\xi(x)\text{”}$$

$$f(x) - \underbrace{p(x)}_{\in \mathbb{P}_n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \underbrace{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}_{\in \mathbb{P}_{n+1}}$$

Πόρισμα: Με τον συμβολισμό και τις υποθέσεις του προηγούμενου Θεωρήματος ισχύει:

$$\underbrace{\max_{a\le x\le b}|f(x)-p(x)|}_{\|f-p\|_\infty} \le \frac{1}{(n+1)!}\underbrace{\max_{a\le x\le b}|f^{(n+1)}(x)|}_{\|f^{(n+1)}\|_\infty}\max_{a\le x\le b}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$$

Παράσταση και υπολογισμός του πολυωνύμου παρεμβολής.

α) Παράσταση σε μορφή Lagrange.

Έστω $x_0,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους. Τότε, για κάθε $i=0,\dots,n$ έστω $L_i\in\mathbb{P}_n$ τ.ω $L_i(x_j)=\delta_{ij}$

$$L_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{για } i=j\\ 0 & \text{διαφορετικά}\end{cases}\quad j=0,\dots,n$$

Το L_i είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n και τα $x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n$ είναι ρίζες του.
Άρα,

$$L_i(x)=a_i\prod_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n}(x-x_j).$$

Το a_i προκύπτει από τη σχέση $L_i(x_i)=1$, δηλαδή

$$a_i\prod_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n}(x_i-x_j)=1.$$ Άρα έχουμε

$$a_i=\frac{1}{\prod_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n}(x_i-x_j)}$$

Συμπέρασμα,

$$\boxed{L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}}$$

Τα πολυώνυμα $L_0, \ldots, L_n$ λέγονται πολυώνυμα του Lagrange ως προς τα σημεία $x_0, \ldots, x_n$.

Ισχυρισμός: Το πολυώνυμο $p \in \mathbb{P}_n$ παρεμβολής μιας συνάρτησης f στα $x_0, \ldots, x_n$, δηλ.

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i=0, \ldots, n.$$

γράφεται στη μορφή

$$\circledast \qquad p(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot L_k(x).$$

Απόδειξη:

Στο δεξιό μέλος αυτής της σχέσης έχουμε ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ n. Η τιμή του στο x_i είναι

$$\sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot \underbrace{L_k(x_i)}_{=\delta_{ki}} = f(x_i) \cdot \overbrace{L_i(x_i)}^{\textcircled{1}} = f(x_i), \quad i=0, \ldots, n.$$

Δηλαδή στο δεξιό μέλος έχουμε ένα πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_0, \ldots, x_n$. Λόγω της μοναδικότητας του πολυωνύμου παρεμβολής αυτό συμπίπτει με το p, δηλαδή ισχύει η $\circledast$

Η (*) λέγεται παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής της f σε μορφή Lagrange.

<u>Πλεονεκτήματα:</u>

• Η (*) είναι απλούστατη και πολύ κατάλληλη για θεωρητικούς σκοπούς.

<u>Μειονεκτήματα.</u>

• Ο υπολογισμός τιμών του p μέσω της (*) είναι πολύ δαπανηρός.

• Αν συμπεριλαβαμε ένα μόνο επί πλέον σημείο παρεμβολής x_{n+1}, αναγκαστικά πρέπει να υπολογίσαμε νέα (διαφορετικά) πολυώνυμα Lagrange ως προς τα σημεία $x_0, \dots, x_{n+1}$

ε) <u>Παράσταση</u> σε μορφή Νεύτωνα.

Ζητείται $p \in \mathbb{P}_n$ τω

$$(+) \quad p(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Θέτουμε

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

με άγνωστους συντελεστές $a_0, \dots, a_n$.

Τότε

$$p(x_0) = y_0 \rightsquigarrow a_0 = y_0$$

$$p(x_1) = y_1 \rightsquigarrow \underset{y_0}{a_0} + a_1(x_1 - x_0) = y_1 \Rightarrow a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$\vdots$$

:

Σημείωση: Με αυτόν τον τρόπο το (+) γράφεται ως γραμμικό σύστημα n+1 εξισώσεων με n+1 αγνώστους με κάτω τριγωνικό πίνακα.

Έτσι, από την πρώτη εξίσωση προκύπτει το a_0, από τη δεύτερη το a_1 (χρησιμοποιείται το a_0) κλπ.

Πλεονεκτήματα:

1. Αν ξέραμε το p σε μορφή του Νεύτωνα, μπορούμε να υπολογίσουμε τιμές του με το σχήμα του Horner:

• $p(x) = a_0 + (x-x_0)(a_1 + (x-x_1)(a_2 + \dots + (x-x_{n-1})a_n)\dots)$

2. Για κάθε k, $0 \le k \le n$, το πολυώνυμο $p_k \in \mathbb{P}_k$ που παράγεται από τους πρώτους k+1 όρους του p είναι τ.ω

$$p_k(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, k$$

Συμπέρασμα: Παρεμβολή σε ένα επί πλέον σημείο x_{n+1} απαιτεί τον υπολογισμό ενός μόνο νέου συντελεστή a_{n+1}.

Μειονέκτημα:

Δεν είναι κατάλληλη για θεωρητικούς σκοπούς.

$\boxed{9-05-17}$

Παράσταση και υπολογισμός του πολυωνύμου παρεμβολής

$x_0, \dots, x_n$ ανά δύο διαφορετικά

α) Παράσταση σε μορφή Lagrange

Τα πολυώνυμα L_i,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}, \quad i=0,\dots,n$$

λέγονται πολυώνυμα του Lagrange, ως προς τα σημεία $x_0, \dots, x_n$

Το $p \in P_n$,

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i=0,\dots,n$$

γράφεται στη μορφή:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot L_i(x)$$

β) Παράσταση σε μορφή του Νεύτωνα

Θέτουμε:

$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

Τότε,

$$p(x_0) = y_0 \rightsquigarrow a_0 = y_0$$

$$p(x_1) = y_1 \rightsquigarrow a_1 = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

$\vdots$

Ένας τρόπος υπολογισμού των συντελεστών a_i στην παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής σε μορφή του Νεύτωνα είναι με τις λεγόμενες διαιρεμένες διαφορές.

γ) Έστω $f \in C[a,b]$, $x_0, x_1, \ldots \in [a,b]$, με $x_i \neq x_j$ για $i \neq j$. Τότε, ορίζουμε επαγωγικά ως προς i:

Δεν έχουν σχέση.

, είναι η τάξη

$$\Delta^0(x_0)(f) = f(x_0)$$

$$\Delta^i(x_0,\ldots,x_i) = \frac{\Delta^{i-1}(x_1,\ldots,x_i) - \Delta^{i-1}(x_0,\ldots,x_{i-1})}{x_i - x_0},$$

$i \geq 1$

Ο αριθμός $\Delta^i(x_0,\ldots,x_i)(f)$ λέγεται διαιρεμένη διαφορά τάξης i της f ως προς τα σημεία $x_0,\ldots,x_i$

Με αυτόν τον συμβολισμό, και $y_i = f(x_i)$, $i=0,\ldots,n$ οι συντελεστές a_i στην παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής σε μορφή του Νεύτωνα δίνονται από τις σχέσεις:

$$a_i = \Delta^i(x_0,\ldots,x_i)(f), \quad i=0,\ldots,n$$

δ) Παρεμβολή σε ένα σημείο κατά Aitken-Neville.

Ένας τρόπος υπολογισμού της τιμής του πολυωνύμου παρεμβολής σε ένα σημείο (που αποφεύγει τον υπολογισμό ολόκληρου του πολυωνύμου, δηλαδή των συντελεστών του) δίνεται από τη μέθοδο των Aitken-Neville.

Βασική ιδέα:

Έστω $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_n$ τα πολυώνυμα παρεμβολής της f στα σημεία $x_m, \dots, x_{m+n}$, και $x_{m+1}, \dots, x_{m+n+1}$ αντίστοιχα, τότε το πολυώνυμο $q \in \mathbb{P}_{n+1}$

$$q(x) = \frac{1}{x_{m+n+1} - x_n} \cdot \begin{vmatrix} p_1(x) & x_m - x \\ p_2(x) & x_{m+n+1} - x \end{vmatrix},$$

παρεμβάλλεται στην f στα σημεία $x_m, \dots, x_{m+n+1}$.

Βασιζόμενοι σε αυτήν την ιδιότητα και συμβολίζοντας με $p(x_i, \dots, x_{i+j}; \xi)$ την τιμή στο σημείο ξ του πολυωνύμου παρεμβολής της f στα σημεία $x_i, \dots, x_{i+j}$ οδηγούμαστε τον πίνακα των Aitken-Neville

$$y_i = f(x_i)$$

x_i	y_i	$p \in \mathbb{P}_1$	$p \in \mathbb{P}_2$	$p \in \mathbb{P}_3$	....	
x_0	y_0					$x_0 - \xi$
x_1	y_1	$p(x_0, x_1; \xi)$				$x_1 - \xi$
x_2	y_2	$p(x_1, x_2; \xi)$	$p(x_0, x_1, x_2; \xi)$			$x_2 - \xi$
x_3	y_3	$p(x_2, x_3; \xi)$	$p(x_1, x_2, x_3; \xi)$	$p(x_0, x_1, x_2, x_3; \xi)$		⋮
⋮						

Συμπεριφορά του πολυωνύμου παρεμβολής για μεγάλο n

Θεώρημα (Θεώρημα του Faber)

Για κάθε "τέκνακα" σημείων παρεμβολής $x_{ni} \in [-1, 1]$, $i=0, \ldots, n$ δηλαδή

x_{00}

x_{10} x_{11}

x_{20} x_{21} x_{22}

⋮

(ανά δύο διαφορετικοί μεταξύ τους σε κάθε γραμμή) υπάρχει συνάρτηση $f \in C[-1,1]$ τ.ω εάν $p_n \in \mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_{n0}, \ldots, x_{nn}$, τότε ισχύει

$\|f - p_n\|_\infty$

$$\limsup_{n\to\infty} \|f - p_n\|_\infty = \infty$$

$$(\|\phi\|_\infty = \max_{-1\le x\le 1} |\phi(x)|).$$

Συμπέρασμα, η παρεμβολή με πολυώνυμα μεγάλου βαθμού δεν είναι πρακτικά χρήσιμη.

Παρεμβολή τύπου Hermite.

Θεώρημα (Παρεμβολή τύπου Hermite)

Έστω $m_0, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}_0$ και $N := m_0 + m_1 + \ldots + m_n + n$ και $M := \max(m_0, \ldots, m_n)$. Αν $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $f \in C^M[a,b]$, τότε το "πρόβλημα παρεμβολής τύπου Hermite",

ζητείται $p \in \mathbb{P}_N$ τ.ω

$$(*) \quad \begin{cases} p^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0), & i = 0, \ldots, m_0 \\ p^{(i)}(x_1) = f^{(i)}(x_1), & i = 0, \ldots, m_1 \\ \vdots \\ p^{(i)}(x_n) = f^{(i)}(x_n), & i = 0, \ldots, m_n. \end{cases}$$

λύνεται μονοσήμαντα.

Απόδειξη

Το $(*)$ γράφεται ως γραμμικό σύστημα

Πλήθος αγνώστων: $N+1$ (οι συντελεστές $a_0, \ldots, a_N$ του p)

Πλήθος εξισώσεων:

$$(m_0+1) + (m_1+1) + \ldots + (m_n+1) =$$

$$= \underbrace{m_0 + m_1 + \ldots + m_n + n}_{N} + 1. \quad = N+1$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα έχει μόνο την τετριμμένη λύση

Ομογενές σύστημα.

Ζητείται $q \in \mathbb{P}_N$ τω

$$\begin{cases} q^{(i)}(x_0) = 0, & i = 0, \dots, m_0 \\ \vdots & \\ q^{(i)}(x_n) = 0, & i = 0, \dots, m_n \end{cases}$$

Αυτό σημαίνει ότι το x_0 είναι ρίζα του q τάξης $m_0+1, \dots,$ το x_n είναι ρίζα του q τάξης m_n+1.

Συνολικά το q έχει τουλάχιστον $(m_0+1)+(m_1+1)+\dots+(m_n+1) = N+1$ ρίζες (μετρώντας και την πολλαπλότητα)

Επομένως $q = 0$

Παράσταση του σφάλματος παρεμβολής

Έστω $f \in C^{N+1}[a,b]$. Τότε $\forall x \in [a,b]$ $\exists \xi \in (a,b)$

$$f(x) - \underbrace{p(x)}_{\in \mathbb{P}_n} = \frac{f^{(N-1)}(\xi)}{(N+1)!} \underbrace{(x-x_0)^{m_0+1} \cdots (x-x_n)^{m_n+1}}_{\in \mathbb{P}_{N+1}}.$$

Η πιο συνηθισμένη περίπτωση παρεμβολής Hermite είναι για $m_0 = m_1 = \dots = m_n = 1$.

Δηλαδή, ζητείται $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ τ.ω

$$(**) \quad \begin{cases} p(x_i) = f(x_i) \\ p'(x_i) = f'(x_i) \end{cases}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Θε

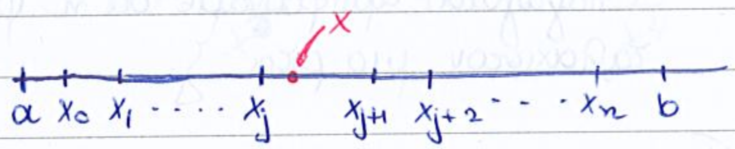
Θεώρημα (Παράσταση του σφάλματος της παρεμβολής τύπου Hermite)

Έστω $[a,b] \in \mathbb{R}$, $x_0,\dots,x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, και $f \in C^{2n+2}[a,b]$. Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ το πολυώνυμο που ικανοποιεί τις (**) τότε $\forall x \in [a,b]\ \exists \xi \in (a,b)$ τ.ω

$$f(x)-p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{2n+2}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2$$

Απόδειξη: Για $x \in \{x_0,\dots,x_n\}$ η παράσταση ισχύει για κάθε $\xi \in (a,b)$.

Έστω, λοιπόν, $x \in [a,b]$, $x \notin \{x_0,\dots,x_n\}$.
Υποθέτω, χ.τ.γ. ότι $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$
Έστω $x \in (x_j, x_{j+1})$, για $j=0,\dots,n-1$
(Οι περιπτώσεις $x<x_0$ και $x>x_n$ αποδεικνύονται εντελώς αντίστοιχα)



Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$\Psi(t) = \prod_{i=0}^{n}(t-x_i)^2$$

και

$$\varphi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\Psi(x)}\cdot \Psi(t), \quad t \in [a,b]$$

Προφανώς $\psi \in C^{2n+2}[a,b]$

Τώρα

$$\psi(x_i) = 0 \quad , \quad i=0,\dots,n$$

$$\psi(x) = 0$$

Επομένως, η ψ έχει στο $[a,b]$ τουλάχιστον $n+2$ ρίζες. ~~Θεώρημα~~

Σύμφωνα με το Θεώρημα του Rolle η ψ' έχει ρίζες $\xi_0, \dots, \xi_n$

$$x_0 < \xi_0 < x_1 < \xi_1 < x_2 < \dots < x_{j-1} < \xi_{j-1} < x_j < \xi_j < x < \xi_{j+1} < x_{j+1} <$$

$$< \dots < \xi_n < x_n$$

Επιπλέον $\psi'(x_i) = 0 \ , \ i=0,\dots,n.$

<u>Συμπέρασμα</u>: Η ψ' έχει στο $[a,b]$ τουλάχιστον $2n+2$ ρίζες.

Επαγωγικά συμπεραίναμε ότι η $\psi^{(2n+2)}$ έχει στο (a,b) τουλάχιστον μια ρίζα ξ.

Τώρα,

$$\psi^{(2n+2)}(t) = f^{(2n+2)}(t) - \cancel{p^{(2n+2)}(t)}^{\,0} - \frac{f(x)-p(x)}{\Psi(x)} \underbrace{\Psi^{(2n+2)}(t)}_{(2n+2)!}$$

Επομένως

$$0 = \cancel{\psi^{(2n+2)}}(\xi) = f^{(2n+2)}(\xi) - \frac{f(x)-p(x)}{\psi(x)}.(2n+2)!$$

$$\Rightarrow f(x)-p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}.\psi(x)$$

Άσκηση 4.4.

$p \in \mathbb{P}_3$ $\quad p(x_i) = \ln(x_i), \; x_i = i+1, \; i=0,\dots,3$

$\mathcal{E}(x) := \ln x - p(x)$

N.Δ.Ο : Η $\mathcal{E}(x)$ έχει στο $[1,4]$ ακριβώς 4 ρίζες.

Απόδειξη. Θέτω $f(x) = \ln x$, για $x \in [1,4]$.

$$\forall x \in [1,4] \quad \exists \xi \in (1,4) \quad \underbrace{f(x)-p(x)}_{\mathcal{E}(x)} = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)(x-2)(x-3)\cdot(x-4)$$

$f(x) = \ln x \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f'(x) = 1/x$

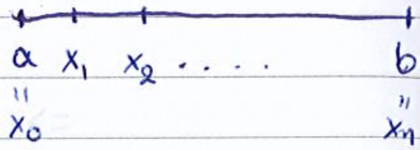
$f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(x) = \underbrace{-\frac{1}{4!}\frac{6}{\xi^4}}_{\neq 0}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Το δεξιό μέλος μηδενίζεται μόνο στα σημεία 1, 2, 3, 4 επομένως η $\mathcal{E}$ έχει ακριβώς 4 ρίζες.

11-05-17

Παρεμβολή με splines.



Έστω $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ ένας διαμερισμός ενός διαστήματος $[a,b]$. Splines, ως προς αυτόν τον διαμερισμό λέγονται γενικά συναρτήσεις που έχουν μια ορισμένη μορφή σε κάθε υποδιάστημα $[x_i,x_{i+1}]$, είναι π.χ. πολυώνυμα βαθμού το πολύ m σε κάθε υποδιάστημα.

Συχνά απαιτείται κάποια ομαλότητα των splines σε όλο το $[a,b]$.

Θα ασχοληθούμε πρώτα με μια ειδική περίπτωση που χρησιμοποιείται συχνά στις εφαρμογές.

Ορισμός (ομαλή splines):

Έστω $[a,b]$ ένα διάστημα και Δ
$\Delta: a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ ένας διαμερισμός του. Έστω $m\in\mathbb{N}$. Τα στοιχεία του γραμμικού χώρου

$$S_m(\Delta):=\{s\in C^{m-1}[a,b]: s\big|_{[x_i,x_{i-1}]}\in\mathbb{P}_m,\ i=0,\dots,n-1\}$$

λέγονται (πολυωνυμικές) ομαλές splines βαθμού m (ως προς τον Δ).

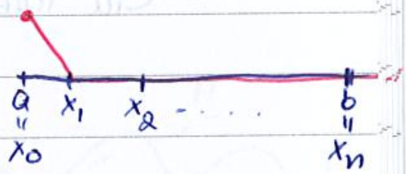
Κατά κανόνα στην πράξη χρησιμοποιούνται οι $S_1(\Delta)$ και $S_3(\Delta)$. Τις πρώτες τις λέμε γραμμικές και τις δεύτερες κυβικές.

Παρεμβολή με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις.

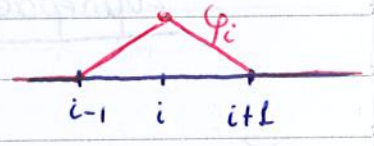
Έστω $\Delta: \ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$, και $S_1(\Delta)$ ο αντίστοιχος χώρος των splines βαθμού το πολύ 1 ως προς τον διαμερισμό Δ.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις φ_i, $i = 0, \dots, n$ ως εξής:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -\dfrac{x - x_1}{x_1 - x_0} & \text{στο } [x_0, x_1] \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



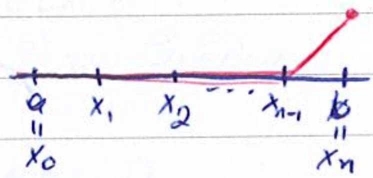
$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & , x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\dfrac{x - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} & , x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



$i = 0, \dots, n-1$

και

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & , x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$



Προφανώς $\varphi_i \in S_1(\Delta)$

Επίσης $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & j=i \\ 0 & j\neq i \end{cases}$

Ισχυρισμός : $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις.

Πράγματι,

$$\sum_{i=0}^{n} c_i\varphi_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} c_i \underbrace{\varphi_i(x_j)}_{=\delta_{ij}} = 0 \quad \text{για } j=0,\dots,n$$

$$\Rightarrow c_j \underbrace{\varphi_j(x_j)}_{=1} = 0 \Rightarrow c_j = 0, \; j=0,\dots,n$$

Επί πλέον, κάθε $s \in S_1(\Delta)$ γράφεται στη μορφή

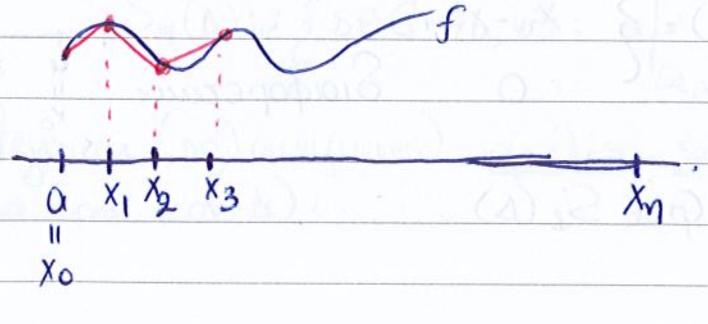
$$s = \sum_{i=0}^{n} s(x_i)\cdot\varphi_i$$

Συμπέρασμα, $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ είναι βάση του $S_1(\Delta)$

Παρεμβολή με στοιχεία του $S_1(\Delta)$

Έστω $f \in C[a,b]$. Τότε υπάρχει ακριβώς μια $s \in S_1(\Delta)$ τ.ω

$$s(x_i) = f(x_i), \; i=0,\dots,n$$



Μάλιστα ισχύει:

$$s(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\varphi_i(x)$$

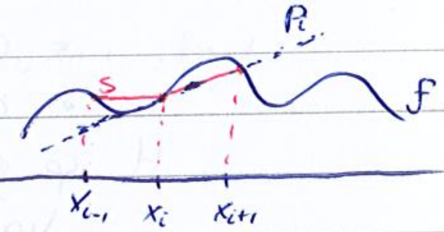
<u>Θεώρημα</u> (Εκτίμηση του σφάλματος παρεμβολής με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις)

Έστω $f\in C^2[a,b]$, $\Delta: a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$ και $s\in S_1(\Delta)$ η παρεμβάλλουσα spline της f στους κόμβους $x_0,\dots,x_n$.

Αν $h_i=x_i-x_{i-1}$ και $h=\max\limits_{1\le i\le n} h_i$, τότε

$\boxed{\|\varphi\|_\infty=\max\limits_{a\le x\le b}|\varphi(x)|}$

$$\|f-s\|_\infty \le \frac{h^2}{8}\|f''\|_\infty$$



<u>Απόδειξη</u>

Έστω $p_i\in \mathbb{P}_1$ τ.ω.

$$\left.\begin{aligned} p_i(x_i)&=f(x_i)\\ p_i(x_{i+1})&=f(x_{i+1})\end{aligned}\right\}$$

Προφανώς, για κάθε $x\in[x_i,x_{i+1}]$ έχουμε $p_i(x)=s(x)$, οπότε

- $f(x)-s(x)=f(x)-p_i(x)$, $x\in[x_i,x_{i+1}]$
- Επίσης, σύμφωνα με την (4.2) του βιβλίου, έχουμε

$\forall x\in[x_i,x_{i+1}]\ \exists\ \xi=\xi(x)\in[x_i,x_{i+1}]$

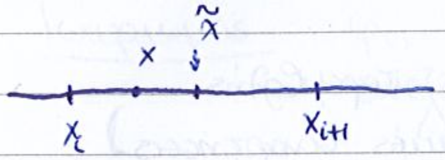
$$f(x)-p_i(x)=\frac{f''(\xi(x))}{2}(x-x_i)(x-x_{i+1}).$$

<u>Συμπέρασμα</u>: Για $x\in[x_i,x_{i+1}]$

$$f(x)-s(x)=\frac{f''(\xi(x))}{2}(x-x_i)(x-x_{i+1}).$$

Άρα,

$$|f(x)-s(x)| \le \frac{1}{2} \underbrace{\max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |(x-x_i)(x-x_{i+1})|}_{=} \overbrace{\max_{x_i \le \xi \le x_{i+1}} |f''(\xi)|}^{\le \|f''\|_\infty}$$



$$\max_{x_i \le x \le x_{i+1}} \left((x-x_i)(x_{i+1}-x)\right) = \frac{h_{i+1}^2}{4}$$

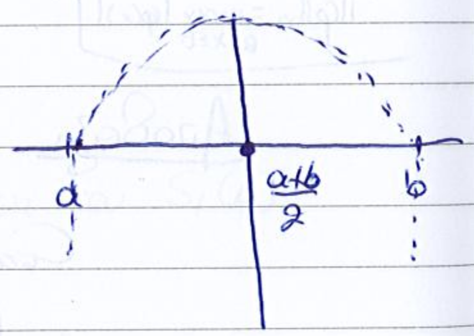
$$\Rightarrow \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |f(x)-s(x)| \le \frac{h_{i+1}^2}{8} \|f''\|_\infty$$

$$\Rightarrow \max_{a \le x \le b} |f(x)-s(x)| \le \frac{h^2}{8} \|f''\|_\infty$$

$x-a$ $\quad$ $b-x$

$$\varphi(x) = (x-a)(b-x) \qquad x \in [a,b]$$
$$= -x^2 + (a+b)x - ab$$

- $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$
- $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a+b}{2}$



Η φ λαμβάνει μέγιστο μόνο για $x = \frac{a+b}{2}$

Παρεμβολή με κυβικές splines

Έστω $\Delta: a = x_0 < \dots < x_n = b$ διαμερισμός του $[a,b]$

Ο γραμμικός χώρος $S_3(\Delta)$ αποτελείται από τις συναρτήσεις s που είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο $[a,b]$ και σε κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ 3.

Τα στοιχεία του $S_3(\Delta)$ λέγονται κυβικές splines.

<u>Ερώτημα:</u> Αν $f \in C[a,b]$, υπάρχει $s \in S_3(\Delta)$ τ.ω

$$⊛ \quad s(x_i) = f(x_i) \quad , i=0,\dots,n;$$

Η ⊛ οδηγεί σε ένα γραμμικό σύστημα.

<u>Πλήθος αγνώστων:</u>

$4n$ (4 συντελεστές σε καθένα των n υποδιαστημάτων $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0,\dots,n$)

<u>Συνθήκες παρεμβολής:</u> $2n$ (2 συνθήκες στα άκρα κάθε υποδιαστήματος $[x_i, x_{i+1}]$ Εξασφαλίζουν και συνέχεια της s!)

Συνθήκες συνέχειας της s' στους ενδιάμεσους κόμβους $x_1, \dots, x_{n-1}$: $n-1$

Συνθήκες συνέχειας της s'' : $n-1$

<u>Πλήθος συνθηκών</u>: $2n + (n-1) + (n-1) = 4n-2$

<u>Απάντηση στο ερώτημα</u>: Για να υπάρχει μοναδική τέτοια s απαιτούνται δύο αξιώματα συνθήκες.

Θεώρημα (Παρεμβολή με κυβικές splines)

Έστω $f \in C^1[a,b]$
και $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
ένας διαμερισμός του $[a,b]$. Τότε
υπάρχει ακριβώς μία $s \in S_3(\Delta)$ τ.ω

$$(+)\begin{cases} s(x_i) = f(x_i) \quad , i=0,\dots,n \\ s'(x_0) = f'(x_0) \\ s'(x_n) = f'(x_n) \end{cases}$$

Το (+) οδηγεί σε ένα τετραγωνικό γραμμικό σύστημα με πίνακα με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο.

Θεώρημα: Έστω $f \in C^2[a,b] \dots$

$$s(x_i) = f(x_i) \quad , i=0,\dots,n$$
$$s''(x_0) = f''(x_0)$$
$$s''(x_n) = f''(x_n)$$

Ορισμός: Οι $s \in S_3(\Delta)$ τ.ω $s''(a) = s''(b) = 0$ λέγονται <u>φυσικές</u> κυβικές splines.

Υπάρχει ακριβώς μια <u>φυσική</u> κυβική spline s. τ.ω

$$s(x_i) = f(x_i) \quad , i=0,\dots,n$$

Θεώρημα (Εκτίμηση του σφάλματος παρεμβολής με κυβικές splines).

Έστω $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$,
$h = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})$.

Αν $f \in C^4[a,b]$ και $s \in S_3(\Delta)$ τ.ω

$$\begin{cases} s(x_i) = f(x_i), & i = 0, \dots, n \\ s'(x_0) = f'(x_0) \\ s'(x_n) = f'(x_n) \end{cases}$$

τότε

$$\|f - s\|_\infty \le \frac{5}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_\infty$$

$\boxed{12\text{-}05\text{-}17}$

Άσκηση 4.5

$p \in \mathbb{P}_3$ $\quad p(i) = e^i$, $i = 1,2,3,4$.

ΝΔΟ

$\forall x \in (2,3) \quad e^x > p(x)$.

Απόδειξη

Το $p \in \mathbb{P}_3$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της συνάρτησης $f(x) = e^x$ στα σημεία $1, \dots, 4$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3

$\forall x \in [1,4] \ \exists \ \xi(x) \in (1,4)$

τ.ω

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!} (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Ιδιαίτερα

πάντα το μεγάλο διάστημα

$\forall x \in (2,3)$ $\quad \forall \xi(x) \in (1,4)$

$$e^x - p(x) = \underbrace{\frac{e^{\xi(x)}}{4!}}_{+} \underbrace{\underset{+}{(x-1)}\underset{+}{(x-2)}\underset{-}{(x-3)}\underset{-}{(x-4)}}_{>0}$$

$\Rightarrow e^x - p(x) > 0$

$\Rightarrow e^x > p(x)$

'Ασκηση 4.6

$f \in C[a,b]$ $a \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le b$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους.

$p \in \mathbb{P}_n$ $p(x_i) = f(x_i)$, $i=0,\dots,n$.

P πολυωνυμο $P(x_i) = f(x_i)$, $i=0,\dots,n$.

ΝΔΟ:

$$P = p + r \cdot q \quad \text{με } q \text{ πολυωνυμο}$$

$$\text{και } r(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n)$$

Απόδειξη

Προφανως $P(x_i) = p(x_i)$, $i=0,\dots,n$

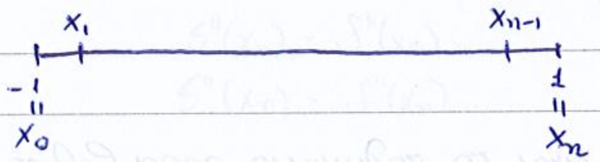
οποτε τα $x_0,\dots,x_n$ ειναι ριζες του $P-p$

Επομενως

$$P(x) - p(x) = \underbrace{(x-x_0)\dots(x-x_n)}_{=r(x)} \cdot q(x) \quad \text{με } q \text{ πολυωνυμο}$$

'Ασκηση 4.11

$n \in \mathbb{N}$, $x_i = -1 + i\dfrac{2}{n}$, $i=0,\dots,n$



$f \in C[-1,1]$, $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i=0,\dots,n$$

ΝΔΟ

- f αρτια $\rightsquigarrow$ p αρτιο
- f περιττή $\rightsquigarrow$ p περιττο.

Απόδειξη

Αν x_i σημείο παρεμβολής τότε
και το $-x_i$ είναι σημείο παρεμβολής.

• f άρτια: Θέτουμε $q(x) := p(-x)$, $x \in [-1, 1]$
$(f(-x) = f(x))$

Τότε $q \in \mathbb{P}_n$ και

$$q(x_i) = p(-x_i) = f(-x_i) = \underbrace{f(x_i)}_{f \text{ άρτια}} \quad i = 0, \dots, n.$$

Συμπέρασμα. $q(x) = p(x)$, οπότε $p(-x) = p(x)$.

• f περιττή
$(f(-x) = -f(x))$

$$q(x) := -p(-x)$$
$$\Rightarrow q \in \mathbb{P}_n \text{ και}$$
$$q(x_i) = -\underset{f(-x_i)}{\underset{\shortparallel}{p(-x_i)}} = -f(-x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

Συμπέρασμα,

$$q(x) = p(x), \text{ οπότε } -p(-x) = p(x)$$
δηλ. $p(-x) = -p(x)$.

Άσκηση 4.15

$x_0, x_1, x_2 \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά

+① $\begin{cases} f \in C^{(4)}[a,b] \\ p \in \mathbb{P}_{(3)} \text{ τ.ω} \end{cases}$

$$p(x_i) = f(x_i) \quad , i=0,1,2$$
$$p'(x_1) = f'(x_1).$$

ΝΔΟ

$\forall x \in [a,b] \quad \exists \xi \in (a,b).$

γιατί είχαμε 2 συνθήκες

$$⊛ \quad f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$$

Απόδειξη

- $x \in \{x_0, x_1, x_2\}$

  Τότε η ⊛ ισχύει για όλα τα ξ

- $x \in [a,b] \quad , x \notin \{x_0, x_1, x_2\}$

  Θέτουμε

$$\phi(t) = (t-x_0)(t-x_1)^2(t-x_2)$$

και $\varphi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)} \cdot \phi(t), \quad t \in [a,b].$

όσες και η f.

Τότε, $\varphi \in C^4[a,b]$ και.

$\varphi(x_i) = 0, \; i=0,1,2$

$\varphi(x) = 0$

Τότε, υπάρχουν σημεία ξ_0, ξ_1, ξ_2 διαφορετικά μεταξύ τους και ~~από~~ x_1 (και x_0, x_2)

τ.ω

$$\varphi'(\xi_i) = 0, \quad i=0,1,2.$$

Επί πλέον

$$\varphi'(x_1) = \underbrace{f'(x_1) - p'(x_1)}_{=0} - \frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)} \cdot \underbrace{\phi'(x_1)}_{=0} = 0$$

Συμπέρασμα, η φ' έχει στο (a,b) τουλάχιστον 4 ρίζες.
η φ'' " " " 3 ρίζες
η φ''' " " " 2 ρίζες
η $\varphi^{(4)}$ " " " 1 ρίζα, ξ

Όμως,
$$\varphi^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) - \cancel{p^{4}(t)} - \frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)} \cdot \phi^{(4)}(t)$$
$$\phi^{(4)}(t) = 4!$$

οπότε
$$\varphi^{4}(\xi) = 0 \iff f^{(4)}(\xi) - \frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)} \cdot 4! = 0$$
$$\iff f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot \phi(x)$$

Άσκηση 4.16 $f \in C^5[0,1]$
$p \in \mathbb{P}_4$ $p^{(i)}(0) = f^{(i)}(0)$, $p^{(i)}(1) = f^{(i)}(1)$ για $i=0,1$.
$p(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})$

ΝΔΟ
$\forall x \in [0,1]$ $\exists \xi \in (0,1)$
$$(+) \quad f(x) - p(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^2 (x-\tfrac{1}{2})(x-1)^2$$

- $x \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$
Τότε η $(+)$ ισχύει για κάθε ξ.

- $x \in [0,1]$, $x \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}$
Θέτουμε $\phi(t) = t^2 (t-\frac{1}{2})(t-1)^2$
$$\varphi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)} \cdot \phi(t), \quad t \in [0,1].$$

Προφανώς, $\varphi \in C^5[0,1]$. Επίσης
$$\varphi(0) = \varphi(\tfrac{1}{2}) = \varphi(x) = \varphi(1) = 0$$

Άρα η φ' μηδενίζεται σε τουλάχιστον τρία σημεία $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \in (0,1)$

Επιπλέον, $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$

Συμπέρασμα.

H φ' έχει στο $[0,1]$ τουλάχιστον 5 ρίζες.
H φ'' " " $(0,1)$ " 4 ρίζες
H φ''' " " " 3 ρίζες
H $\varphi^{(4)}$ " " " 2 ρίζες
H $\varphi^{(5)}$ " " " 1 ρίζα, ξ.

Άρα $\varphi^{(5)}(\xi) = 0$

Όμως,
$$\varphi^{(5)}(t) = f^{(5)}(t) - \cancel{p^{(5)}(t)}^{\,0} - \frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)}\,\phi^{(5)}(t)$$
$$\phi^{(5)}(t) \to 5!$$
$$\Rightarrow \varphi^{(5)}(\xi) = f^{(5)}(\xi) - \frac{f(x)-p(x)}{\phi(x)} \cdot 5! = 0$$
$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \cdot \phi(x).$$

16-05-17

Κυβικές splines του Hermite.

Ορισμός (Κυβικές splines του Hermite).

Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$ και $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$. → στις κυβικές splines είχαμε $s \in C^2[a,b]$

Συναρτήσεις $s \in C^1[a,b]$ τω

$$s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Λέγονται κυβικές splines του Hermite ως προς τον διαμερισμό Δ.

Θεώρημα (Παρεμβολή με κυβικές splines του Hermite)

Έστω $f \in C^1[a,b]$ και $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$. Τότε υπάρχει ακριβώς μία κυβική spline Hermite ως προς Δ, έστω s, τ.ω

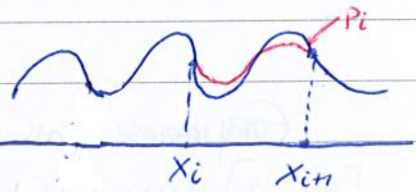
(*) $s(x_i) = f(x_i)$, $s'(x_i) = f'(x_i)$

$i = 0, \ldots, n.$

Αν επιπλέον $f \in C^4[a,b]$, τότε ισχύει

$$\|f - s\|_\infty \le \frac{1}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_\infty$$

με $h = \max\limits_{0 \le i \le n-1} (x_{i+1} - x_i)$



Απόδειξη.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.4 υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο $p_i \in \mathbb{P}_3$ τ.ω

$$p_i(x_j) = f(x_j), \quad p_i'(x_j) = f'(x_j), \quad j = i, i+1,$$

για κάθε $i = 0, \ldots, n-1.$

Τώρα, η συνάρτηση $s:[a,b]\to\mathbb{R}$, $s(x)=p_i(x)$, $x\in[x_i,x_{i+1}]$ είναι η μοναδική κυβική spline Hermite ως προς Δ που ικανοποιεί τις ⊛

Εκτίμηση του σφάλματος:

Για $x\in[x_i,x_{i+1}]$ έχουμε:

$$s(x)=p_i(x)$$

$\forall x\in[x_i,x_{i+1}]\ \exists\ \xi=\xi(x)\in(x_i,x_{i+1})$

$$f(x)-p_i(x)=\frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}\cdot(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2$$ (Σχέση (4.16))

Επομένως, $f(x)-s(x)=f(x)-p_i(x)$

$$=\frac{1}{24}\cdot(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2\cdot f^{4}(\xi(x))$$

Άρα,

① $$|f(x)-p(x)|\le\frac{1}{24}\cdot\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}\{(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2\}\cdot\|f^{(4)}\|_\infty$$

$$\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}\{(x-x_i)^2(x_{i+1}-x)^2\}=\left\{\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}((x-x_i)(x_{i+1}-x))\right\}^2$$

$$=\left(\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{4}\right)^2=\frac{(x_{i+1}-x_i)^4}{16}$$

Επομένως, η ① δίνει

$$|f(x)-p(x)|\le\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{16}\underbrace{(x_{i+1}-x_i)^4}_{\le h^4}\|f^{(4)}\|_\infty$$

$$\Rightarrow |f(x)-p(x)|\le\frac{1}{384}\cdot h^4\|f^{(4)}\|_\infty$$

Το δεξιό μέλος δεν εξαρτάται από το i, οπότε η εκτίμηση ισχύει για κάθε x, δηλαδή:

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)-s(x)|\le\frac{1}{384}\cdot h^4\|f^{(4)}\|_\infty$$

Ασκηση 4.18.

$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

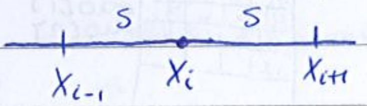
$m \in \mathbb{N}$

$\Sigma_m(\Delta) = \{ s \in C^m[a,b] : s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m, \ i = 0, \dots, n-1 \}$

ΝΔΟ $s \in \Sigma_m(\Delta) \Rightarrow s|_{[a,b]} \in \mathbb{P}_m$

Απόδειξη

Αν αποδείξαμε ότι η s είναι το ίδιο πολυώνυμο σε δύο διαδοχικά υποδιαστήματα $[x_{i-1}, x_i]$ και $[x_i, x_{i+1}]$, τότε επαγωγικά διαπιστώναμε αμέσως ότι $s|_{[a,b]} \in \mathbb{P}_m$.



Αφού η s είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο x_i, θα έχαμε

αριστερό και δεξί όριο

$$s^{(j)}(x_i-) = s^{(j)}(x_i+) \quad , j = 0, \dots, m$$

Με ανάπτυγμα Taylor ως προς το σημείο x_i έχαμε:

Για $x \in [x_{i-1}, x_i]$,

$$(2) \quad s(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{s^{(j)}(x_i-)}{j!} (x - x_i)^j$$

Το σφάλμα - ο τελευταίος όρος είναι 0 γιατί έχαμε πολυώνυμα

για $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$(3) \quad s(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{s^{(j)}(x_i+)}{j!} (x - x_i)^j$$

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι η s είναι το ίδιο πολυώνυμο στα διαστήματα $[x_{i-1}, x_i]$ και $[x_i, x_{i+1}]$.

Τέλος 4ου κεφαλαίου!