Ασκήσεις 4ου κεφαλαίου

Άσκηση 4.4

$p \in \mathbb{P}^3$, $p(x_i) = \log_e(x_i)$, $x_i = i+1$, $i = 0,1,2,3$

ή $p(x_i) = \ln(x_i)$

ΝΔΟ

Η συνάρτηση $\varepsilon(x) = \log(x) - p(x)$ έχει στο διάστημα $[1,4]$ ακριβώς 4 ρίζες.

Απόδειξη

Προφανώς,

$$\varepsilon(1) = \varepsilon(2) = \varepsilon(3) = \varepsilon(4) = 0$$

οπότε η ε έχει τουλάχιστον 4 ρίζες.

Θέτω, $f(x) = \log(x)$, $x \in [1,4]$.

Τότε $\forall x \in [1,4]$ $\exists \xi \in (1,4)$

θέλω να αποδείξω ότι δεν μηδενίζεται πουθενά.

$$\underbrace{f(x) - p(x)}_{\varepsilon(x)} = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

όμως,

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

οπότε, $\forall x \in [1,4]$ $\exists \xi \in (1,4)$,

$$\varepsilon(x) = \underbrace{\left(-\frac{6}{4!\,\xi^4}\right)}_{\neq 0}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Το δεξιό μέλος μηδενίζεται μόνο για $x=1, x=2, x=3, x=4$ οπότε η $\varepsilon(x)$ έχει ακριβώς 4 ρίζες. ∎

Άσκηση 4.5

$p \in \mathbb{P}_3$, $p(i) = e^i$, $i = 1,2,3,4$

ΝΔΟ

$\forall x \in (2,3) \quad e^x > p(x)$

Απόδειξη

$f(x) = e^x$

Έχουμε, $\forall x \in [1,4]$ $\exists \xi \in (1,4)$ $\quad f(x) - p(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

Άρα,

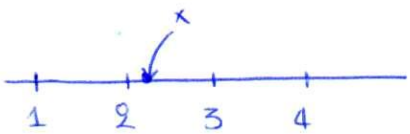
$\forall x \in [1,4]$ $\exists \xi \in (1,4)$ τ.ω

$$e^x - p(x) = \frac{e^\xi}{4!}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

• Για $x \in (2,3)$:

θετικό $\quad$ αρνητικό

$$e^x - p(x) = \frac{e^\xi}{4!}\overset{+}{(x-1)}\overset{+}{(x-2)}\overset{-}{(x-3)}\overset{-}{(x-4)} > 0$$



$\Rightarrow e^x - p(x) > 0$

$\Rightarrow e^x > p(x)$ ∎

Άσκηση 4.6

$f \in C[a,b]$, $a \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le b$,

$p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

γιατί θέλω μοναδικό πολυώνυμο να έχω

P πολυώνυμο

$P(x_i) = f(x_i)$ $\quad i = 0, \dots, n$

ΝΔΟ

$P(x) = p(x) + r(x) \cdot (x - x_0) \dots (x - x_n)$ με r πολυώνυμο

Απόδειξη

Προφανώς, $P(x_i) = p(x_i)$ $i = 0, \dots, n$

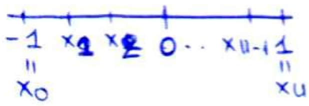
Δηλαδή τα $x_0, \dots, x_n$ είναι ρίζες του πολυωνύμου $P - p$.

Επομένως,

$$P(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)\, r(x) \text{ με } r \text{ πολυώνυμο } \blacksquare$$

Άσκηση 4.11

$n \in \mathbb{N}$, $x_i = -1 + i\frac{2}{n}$, $i = 0, \dots, n$



Βήμα $\frac{2}{n}$, διαχωρισμός του διαστήματος από το $[1,1]$

$f \in C[-1,1]$, $p \in \mathbb{P}_n$ τω $p(x_i) = f(x_i)$ $i = 0, \dots, n$

ΝΔΟ $\quad$ p να έχει μόνο άρτιες δυνάμεις το πολυώνυμο

- f άρτια τότε p άρτιο
- f περιττή τότε και το p είναι περιττό.

Λύση

φ άρτια : $\varphi(-x) = \varphi(x)$ $\forall x \in [-1,1]$

φ περιττή : $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ $\forall x \in [-1,1]$

Σημαντική παρατήρηση : x_i σημείο παρεμβολής $\Rightarrow$ $-x_i$ σημείο παρεμβολής

- f άρτια. Ορίζω $q(x) := p(-x)$ $\forall x \in [-1,1]$

Τότε, $q \in \mathbb{P}_n$ και $\quad$ f άρτια

$$q(x_i) = p(-x_i) = f(-x_i) \overset{\swarrow}{=} f(x_i) \quad , i = 0, \dots, n$$

Άρα, το $q \in \mathbb{P}_n$ είναι πολυώνυμο παρεμβολής της f στα ίδια σημεία $x_0, \dots, x_n$

Λόγω μοναδικότητας έχουμε $q = p$, δηλαδή $p(-x) = p(x)$ $\forall x \in [-1,1]$ $\blacksquare$ άρτια

- f περιττή.

Θέτω $q(x) := -p(-x)$

Προφανώς, $q \in \mathbb{P}_n$ και $q(x_i) = -\underbrace{p(x_i)}_{f(x_i)} = -f(x_i) \overset{f \text{ περιττή}}{=} f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

Άρα, $q \in \mathbb{P}_n$ είναι πολυώνυμο παρεμβολής της f. Λόγω μοναδικότητας του πολυωνύμου παρεμβολής έχουμε $q = p$, δηλαδή $-p(-x) = p(x)$ $\Rightarrow$ $p(-x) = p(x)$ $\forall x \in [-1,1]$

$\Rightarrow$ p περιττό $\blacksquare$ περιττό

$\blacksquare$ άσκηση

α.

Άσκηση 4.15

x_0, x_1, x_2 [redacted] $\in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά

$f \in C^4[a,b]$ και $p \in \mathbb{P}_3$ τ.ω $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0,1,2$

$p'(x_1) = f'(x_1)$

ΝΔΟ

γιατί έχω δύο συνθήκες για το x_1.

$$\forall x \in [a,b] \ \exists \xi \in (a,b) \quad f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2) \quad (*)$$

Λύση

- Για $x \in \{x_0, x_1, x_2\}$ η $(*)$ ισχύει [redacted] για κάθε ξ
- Έστω $x \in [a,b]$, $x \notin \{x_0, x_1, x_2\}$

θέτουμε $\Phi(t) = (t-x_0)(t-x_1)^2(t-x_2)$ και

$$\varphi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)}\Phi(t), \quad t \in [a,b]$$

Ιδιότητες της φ:

θα κάνουμε πράξεις και θα τα βρούμε

- $\varphi \in C^4[a,b]$
- $\varphi(x_i) = 0$, $i = 0,1,2$ και $\varphi(x) = 0$

θέλω να αποδείξω ότι $\varphi^{(4)} = 0$

Άρα, η φ έχει στο $[a,b]$ τουλάχιστον 4 ρίζες $\xrightarrow{\text{Rolle}}$

η φ' έχει στο (a,b) τουλάχιστον 3 ρίζες (διαφορετικές του x_1)

όμως, $\varphi'(x_1) = \underbrace{f'(x_1) - p'(x_1)}_{\substack{=0 \\ \text{(από την} \\ \text{συνθήκη)}}} - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} \cdot \underbrace{\Phi'(x_1)}_{=0} = 0$

Συμπέρασμα,

η φ' έχει στο $[a,b]$ τουλάχιστον 4 ρίζες $\xrightarrow{\text{Rolle}}$

φ'' -//- -//- (a,b) -//- 3 ρίζες $\xrightarrow{\text{Rolle}}$

φ''' -//- -//- (a,b) -//- 2 ρίζες $\xrightarrow{\text{Rolle}}$

$\varphi^{(4)}$ -//- -//- (a,b) -//- 1 ρίζα, έστω ξ.

Άρα, $\boxed{\varphi^{(4)}(\xi) = 0}$. Όμως: $\varphi^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) - \cancel{p^{(4)}(t)}^{0} - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} \underbrace{\Phi^{(4)}(t)}_{=4!}$

$(t^4)'$ ... 4 φορές ...

$$= f^{(4)}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} 4!$$

λύνουμε προς αυτό

Άρα, $f^{(4)}(\xi) - \dfrac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} 4! = 0 \rightsquigarrow f(x)-p(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\Phi(x)$ ■

Άσκηση 4.16

$f \in C^5[0,1]$ και $p \in \mathbb{P}_4$ τ.ω. $p(0)=f(0)$, $p(1/2)=f(1/2)$, $p(1)=f(1)$

$p'(0)=f'(0)$, $p'(1)=f'(1)$

νδο

$\forall x \in [0,1]\ \exists \xi \in (0,1)\ f(x)-p(x) = \dfrac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^2(x-1/2)(x-1)^2$ (*)

έχω 2 συνθήκες για το 1, αντίστοιχα για το 0.

1η περίπτωση

Για $x \in \{0,1/2,1\}$ η (*) ισχύει για κάθε ξ

2η περίπτωση

Έστω $x \in [0,1]$, $x \notin \{0,1/2,1\}$. Θέτουμε, $\Phi(t) = t^2(t-\frac{1}{2})(t-1)^2$

και $\varphi(t) = f(t)-p(t)-\dfrac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)}\Phi(t)$, $\forall t \in [0,1]$

Προφανώς, $\varphi \in C^5[0,1]$. Επίσης, $\varphi(0)=\varphi(1/2)=\varphi(1)=0$ και $\varphi(x)=0$

Επομένως, η φ έχει στο $[0,1]$ τουλάχιστον 4 ρίζες. Τότε η φ' έχει τουλάχιστον 3 ρίζες (ξ_1,ξ_2,ξ_3) διαφορετικές του 0, 1.

Επιπλέον, $\varphi'(0) = \underbrace{f'(0)-p'(0)}_{=0} - \dfrac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)}\cancel{\Phi'(0)}^{0} = 0$

και $\varphi'(1) = \dots = 0$

Άρα, η φ' έχει στο $[0,1]$ τουλάχιστον 5 ρίζες.

η φ'' – " – $(0,1)$ – " – 4 ρίζες

η φ''' – " – $(0,1)$ – " – 3 ρίζες

η $\varphi^{(4)}$ – " – $(0,1)$ – " – 2 ρίζες

η $\varphi^{(5)}$ – " – $(0,1)$ – " – 1 ρίζα, έστω ξ

$\varphi^{(s)}(\xi)=0$

όμως, $\varphi^{(s)}(t)= f^{(s)}(t)-\cancel{p^{(s)}(t)}^{\,0} - \dfrac{f(x)-p(x)}{\bar{\Phi}(x)}\,\underset{}{\overset{s!}{\overset{\|}{\bar{\Phi}^{(s)}(t)}}}$

Άρα,

θέλω να λύσω ως προς αυτό.

$$0=\varphi^{(s)}(\xi)=f^{(s)}(\xi)-\frac{f(x)-p(x)}{\bar{\Phi}(x)}\,s!$$

$$\Rightarrow f(x)-p(x)=\frac{f^{(s)}(\xi)}{s!}\,\bar{\Phi}(x) = x^2(x-1/2)(x-1)^2 \quad \blacksquare$$

είτε 2m είτε οτιδήποτε παραγωγίσιμο πολυώνυμο

διαφ πολ/μα σε θ διάστημα

στις ομαλές splines έχουμε m-1 αντί για m

Άσκηση 4.18

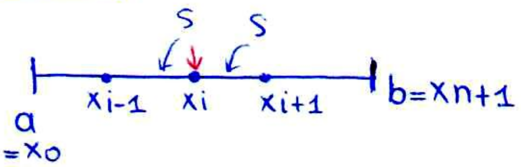
$[a,b]$, $\Delta: a<x_0<x_1<\dots<x_{n+1}=b$

Έστω $m\in\mathbb{N}$. Θεωρούμε τον χώρο $\Sigma_m(\Delta)=\{s\in C^m[a,b]: s|_{[x_i,x_{i+1}]}\in\mathbb{P}_m,\ i=0,\dots,n\}$

ΝΔΟ

$s\in\Sigma_m(\Delta) \Rightarrow s|_{[a,b]}\in\mathbb{P}_m$.

Απόδειξη



Αρκεί να αποδείξουμε ότι η s είναι το ίδιο πολυώνυμο σε δύο διαδοχικά υποδιαστήματα $[x_{i-1},x_i]$ και $[x_i,x_{i+1}]$. Μετά το ζητούμενο έπεται επαγωγικά.

Αναπτύσσοντας κατά Taylor έχουμε:

$$s(x)=\sum_{j=0}^{m}\frac{s^{(j)}(x_i-)}{j}(x-x_i)^j \quad x\in[x_{i-1},x_i]$$

εννοεί την παράγωγο από αριστερά

Δεν υπάρχει καθόλου σφάλμα στα s(x).

και

από δεξιά

$$s(x)=\sum_{j=0}^{m}\frac{s^{(j)}(x_i+)}{j!}(x-x_i)^j,\ x\in[x_i,x_{i+1}]$$

Αφού η s είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο σημείο x_i, έχουμε

$$s^{(j)}(x_i-)=s^{(j)}(x_i+)\ ,\ j=0,1,\dots,m$$

Συμπέρασμα, η s είναι το ίδιο πολυώνυμο στα υποδιαστήματα $[x_{i-1},x_i]$ και $[x_i,x_{i+1}]$ ■