• Παρεμβολή

• Η παρεμβολή είναι ένας τρόπος προσέγγισης συναρτήσεων με "απλούστερες" συναρτήσεις που έχουν διάφορες επιθυμητές ιδιότητες όπως οι τιμές τους υπολογίζονται εύκολα, ολοκληρώνονται εύκολα, παραγωγίζονται εύκολα κ.λ.π.

Έστω f μία πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής και $\{x_0, \dots, x_n\}$ ένα σύνολο $n+1$ ανά δύο διαφορετικών σημείων του πεδίου ορισμού της στα οποία είναι γνωστές οι τιμές της f.

– Υπάρχουν 2 είδη παρεμβολής:

α) Παρεμβολή Lagrange

β) Παρεμβολή Hermite

• Στην παρεμβολή Lagrange ζητείται μία συνάρτηση ϕ από ένα προκαθορισμένο σύνολο συναρτήσεων τ.ω. η ϕ να παρεμβάλλεται στα σημεία $(x_i, f(x_i)), i=0,\dots,n$, δηλαδή,

$$\phi(x_i) = f(x_i),\ i=0,\dots,n.$$

Με άλλα λόγια το γράφημα της συνάρτησης ϕ να διέρχεται από τα σημεία $(x_i, f(x_i)), i=0,\dots,n$

• Στην παρεμβολή Hermite ζητείται επιπλέον οι τιμές παραγώγων συγκεκριμένης τάξης της ϕ να συμπίπτουν με αντίστοιχες της f.

→ Η παρεμβολή στην πράξη γίνεται συνήθως με πολυώνυμα, με κατά τμήματα πολυωνυμικές συναρτήσεις ή με ρητές συναρτήσεις (λόγο πολυωνύμων).

• Πολυωνυμική παρεμβολή:

• Θεώρημα (Παρεμβολή τύπου Lagrange).

Έστω $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά σημεία μεταξύ τους, και $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$

Τότε υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n (γράφουμε $\mathbb{P}_n$) τ.ω. $\underbrace{p(x_i) = y_i, \; i=0,\dots,n}_{(+)}$

→ Απόδειξη:

Αν θέσουμε $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ με άγνωστους συντελεστές $a_0, \dots, a_n$, τότε το (+) είναι ένα γραμμικό σύστημα ως προς $a_0, \dots, a_n$, με $n+1$ αγνώστους και $n+1$ εξισώσεις. Το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα είναι:

$$(++) \quad q \in \mathbb{P}_n \quad q(x_i) = 0, \; i = 0, \dots, n$$

Το q είναι το πολύ βαθμού n και έχει τουλάχιστον $n+1$ ρίζες, άρα είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Δηλαδή το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα έχει μόνο την τετριμμένη λύση. Άρα το αρχικό σύστημα ⊕ έχει ακριβώς μία λύση.

Αν f μία συνάρτηση και $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω.

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n$$

με $x_0, \ldots, x_n$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, τότε λέμε ότι p <u>παρεμβάλλεται στην f</u>.

• <u>Θεώρημα</u> (Παράσταση του σφάλματος παρεμβολής)

Έστω $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^{n+1}[a,b]$, $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, και παίρνω και $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω.

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n$$

Τότε ισχύει, $\forall x \in [a,b] \ \exists \xi = \xi(x) \in (a,b)$

εξαρτάται από το x

$$\circledast \quad f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

<u>Απόδειξη:</u>

<u>1η Περίπτωση</u>: $x \in \{x_0, \ldots, x_n\}$

Τότε η ⊛ ισχύει για κάθε $\xi \in (a,b)$

2η Περίπτωση: $x \in [a,b]$, $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$

- Ορίζουμε τις συναρτήσεις,

$$\Phi(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i), \quad t \in [a,b]$$

και

$$\varphi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} \cdot \Phi(t), \quad t \in [a,b]$$

αριθμός, το x το έχω σταθεροποιήσει

Ιδιότητες της φ: $\varphi \in C^{n+1}[a,b]$

$$\varphi(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n$$

$$\varphi(x) = f(x) - p(x) - \frac{f(x) - p(x)}{\cancel{\Phi(x)}} \cdot \cancel{\Phi(x)} = 0$$

Συμπέρασμα: Η φ έχει στο $[a,b]$ τουλάχιστον $n+2$ διαφορετικές ρίζες.
Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle:

η φ' έχει στο (a,b) τουλάχιστον $n+1$ διαφορετικές ρίζες
η φ'' έχει στο (a,b) τουλάχιστον n διαφορετικές ρίζες

⋮

η $\varphi^{(n+1)}$ έχει στο (a,b) τουλάχιστον 1 ρίζα. Έστω ξ.

Συνεπώς, $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$, $\xi \in (a,b)$

$\Phi(t) = t^{n+1} + q(t)$, $q \in \mathbb{P}_n$

Αλλά, $$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \underbrace{p^{(n+1)}(t)}_{=0} - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} \underbrace{\Phi^{(n+1)}(t)}_{(n+1)!}$$

Άρα, $$f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)}(n+1)! = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Phi(x)$$

Αυτή είναι η (*).

08/05/2018

Θεώρημα

$x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά

$f \in C^{n+1}[a,b]$

$p \in \mathbb{P}_n \quad p(x_i) = f(x_i) \quad , i=0,\ldots,n$

Τότε, $\forall x \in [a,b] \; \exists \xi = \xi(x) \in (a,b)$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Πόρισμα:

$$\underbrace{\max_{a \le x \le b} |f(x) - p(x)|}_{= \|f-p\|_\infty} \le \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty \cdot \max_{a \le x \le b} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

• Παράσταση και υπολογισμός του πολυωνύμου παρεμβολής

α) Παράσταση σε μορφή του Lagrange

$x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά

Για κάθε i, $i = 0, \ldots, n$ υπάρχει $L_i \in \mathbb{P}_n$ τ.ω.

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{για } i=j \\ 0, & \text{για } i \neq j \end{cases}$$

Αφού τα $x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ είναι ρίζες του L_i, έχουμε,

$$L_i(x) = a_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j)$$

→ Για $x = x_i$ έχουμε,

$$1 = a_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)$$

άρα,

$$a_i = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$$

• Συμπέρασμα

$$\boxed{L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad i = 0, \dots, n}$$

Τα $L_0, \dots, L_n$ λέγονται πολυώνυμα του Lagrange ως προς τα σημεία $x_0, \dots, x_n$.

Ισχυρισμός: Το $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω. $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$ γράφεται στη μορφή,

$$(1) \quad p(x) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{f(x_i)}_{\text{αριθμοί}} L_i(x)$$

Η (1) λέγεται παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής της f σε μορφή του Lagrange.

Συμβολίζουμε με $q(x)$ το δεξιό μέλος της (1).

Ιδιοτιμές του q: $q \in \mathbb{P}_n$

$$q(x_j) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{L_i(x_j)}_{\delta_{ij}} = f(x_j) \quad , j=0,\dots,n$$

Λόγω της μοναδικότητας του πολυωνύμου παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $q=p$, δηλαδή ισχύει η (1).

Πλεονεκτήματα:

Η απλότητα αυτής της παράστασης είναι το βασικό της πλεονέκτημα που την καθιστά πολύ χρήσιμη για θεωρητικούς σκοπούς.

Μειονεκτήματα:

i) Παρεμβολή σε ένα επιπλέον σημείο απαιτεί τον εκ νέου υπολογισμό όλων των L_i.

ii) Ο υπολογισμός της τιμής του p σε ένα σημείο με την (1) απαιτεί πάρα πολλές πράξεις.

→ Στην πράξη χρησιμοποιείται σπάνια.

β) Παράσταση σε μορφή του Νεύτωνα

Έστω $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ανά δυο διαφορετικά και $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$

- Θέλουμε να υπολογίσουμε $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω $p(x_i) = y_i,\ i=0,\dots,n$ ②

Γράφουμε το p στη μορφή,

③ $$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)\cdot \dots \cdot(x-x_{n-1})$$ με άγνωστους συντελεστές $a_0, \dots, a_n$.

- Για $x = x_0$: $p(x_0) = a_0 \rightarrow a_0 = y_0$
- Για $x = x_1$: $\underbrace{p(x_1)}_{=y_1} = \underbrace{a_0}_{=y_0} + a_1(x_1 - x_0) \rightarrow a_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

<u>Ιδέα</u>: Με το p στη μορφή ③, το ② είναι ένα γραμμικό σύστημα με $n+1$ συντελεστές και $n+1$ αγνώστους με πίνακα συντελεστών <u>κάτω τριγωνικό πίνακα</u>.

Τέτοια συστήματα λύνονται με τρόπο εντελώς αντίστοιχο της <u>οπισθοδρόμησης</u>.

β) <u>Παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής σε μορφή Νεύτωνα.</u>

$$(*) \quad p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdot \dots \cdot(x-x_{n-1})$$

• <u>Πλεονεκτήματα:</u>

i) Έχοντας το πολυώνυμο στη μορφή (*), μπορούμε να υπολογίσουμε τιμές με το σχήμα Horner:

$$p(x) = a_0 + (x-x_0)\Big(a_1 + (x-x_1)\Big(a_2 + \dots + (x-x_{n-1})a_n \cdots\Big)$$

ii) Προσθέτοντας στην παράσταση (*) έναν μόνο όρο της μορφής, $a_{n+1}(x-x_0)(x-x_1)\cdot \dots \cdot(x-x_n)$,

προσδιορίζουμε μόνο τη νέα τιμή του a_{n+1} και παίρνουμε το πολυώνυμο παρεμβολής στα σημεία $x_0, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}$.

→ Εντελώς αντίστοιχα μπορούμε να αφαιρέσουμε ένα σημείο παρεμβολής κτλ.

• <u>Μειονεκτήματα:</u>

i) Η παράσταση δεν είναι κατάλληλη για θεωρητικούς σκοπούς.

(*) Ένας συστηματικός τρόπος προσδιορισμού των συντελεστών

$a_0, \ldots, a_n$ στην $\circledast$ είναι με τις λεγόμενες διαιρεμένες διαφορές

γ) Διαιρεμένες διαφορές

Έστω $f \in C[a,b]$,

$x_0, x_1, \ldots \in [a,b]$ και $x_i \neq x_j$ για $i \neq j$.

Τότε ορίζουμε επαγωγικά ως προς i:

$$\Delta^0(x_0)(f) := f(x_0)$$

$$\Delta^i(x_0, x_1, \ldots, x_i)(f) = \frac{\Delta^{i-1}(x_1, \ldots, x_i)(f) - \Delta^{i-1}(x_0, \ldots, x_{i-1})}{x_i - x_0}, \quad i \geq 1$$

→ Ο αριθμός $\Delta^i(x_0, x_1, \ldots, x_i)$ λέγεται διαιρεμένη διαφορά τάξης i της f ως προς τα σημεία $x_0, \ldots, x_i$

Αν p στην $\circledast$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής μιας συνάρτησης f στα σημεία $x_0, \ldots, x_n$, τότε,

$$a_i = \Delta^i(x_0, \ldots, x_i)(f), \quad i = 0, \ldots, n$$

• <u>Πίνακας Διαιρεμένων Διαφορών</u>:

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$\cdots$
x_0	$\Delta^0(x_0)(f)$			
x_1	$\Delta^0(x_1)(f)$	$\Delta^1(x_0,x_1)(f)$		
x_2	$\Delta^0(x_2)(f)$	$\Delta^1(x_1,x_2)(f)$	$\Delta^2(x_0,x_1,x_2)(f)$	

κάτω τριγωνικός πίνακας.

• <u>Παρεμβολή σε ένα σημείο κατά Aitken-Neville</u>

<u>Θέμα</u>: Ζητείται <u>η τιμή</u> του πολυωνύμου παρεμβολής $p \in \mathbb{P}_n$ μιας συνάρτησης f στα σημεία $x_0, \dots, x_n$ μόνο σε ένα σημείο.

<u>Ιδέα</u>: Έστω $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_n$ τα πολυώνυμα παρεμβολής μιας συνάρτησης f στα σημεία,

$$x_m, \dots, x_{m+n} \quad \text{και}$$

$$x_{m+1}, \dots, x_{m+n+1}$$

<u>Ισχυρισμός</u>: Το $q \in \mathbb{P}_{n+1}$, $q(x) = \dfrac{1}{x_{m+n+1}-x_m} \begin{vmatrix} p_1(x) & x_m - x \\ p_2(x) & x_{m+n+1} - x \end{vmatrix}$

παρεμβάλλεται στα σημεία,

$$x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}, x_{m+n+1}$$

Απόδειξη ισχυρισμού:

$$q(x_m) = \frac{1}{x_{m+n+1} - x_m} \begin{vmatrix} f(x_m) & 0 \\ p_2(x_m) & x_{m+n+1} - x_m \end{vmatrix} = f(x_m)$$

$$q(x_{m+n+1}) = \frac{1}{x_{m+n+1} - x_m} \begin{vmatrix} p_1(x_{m+n+1}) & x_m - x_{m+n+1} \\ f(x_{m+n+1}) & 0 \end{vmatrix} = f(x_{m+n+1})$$

(Για τα υπόλοιπα σημεία)

Για $i \in \{m+1, \dots, m+n\}$ έχουμε

$$q(x_i) = \frac{1}{x_{m+n+1} - x_m} \begin{vmatrix} f(x_i) & x_m - x_i \\ f(x_i) & x_{m+n+1} - x_i \end{vmatrix} = f(x_i)$$

Το πολυώνυμο παρεμβολής υπολογίζεται με πίνακα αντίστοιχο με εκείνου των διαιρεμένων διαφορών (Βιβλίο σελ. 185)

- <u>Συμπεριφορά του πολυωνύμου παρεμβολής για μεγάλο n</u>.

• <u>Θεώρημα</u> (Θεώρημα του Faber)

Για κάθε πίνακα σημείων παρεμβολής,

$$\begin{array}{ccc} x_{00} & & \\ x_{10} & x_{11} & \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

με $x_{ni} \in [-1,1]$, $i=0,\dots,n$

υπάρχει $f \in C[-1,1]$ τ.ω. αν $p_n \in \mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_{n0},\dots,x_{nn}$, τότε,

$$\lim_{n\to\infty} \sup\left(\max_{-1\le x\le 1} |f(x)-p_n(x)| \right) = \infty ,$$

δηλαδή υπάρχει υπακολουθία n_k τ.ω.

$$\lim_{n_k\to\infty} \left(\max_{-1\le x\le 1} |f(x)-p_{n_k}(x)| \right) = \infty$$

• <u>Παρεμβολή τύπου Hermite</u>

Έστω $m_0, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}_0$

$N := m_0 + m_1 + \dots + m_n + n$, και

$M = \max(m_0, \dots, m_n)$

Αν $x_0,\dots,x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά σημεία και $f \in C^M[a,b]$, τότε "<u>το πρόβλημα παρεμβολής Hermite</u>":

Ζητείται $p \in \mathbb{P}_N$ τ.ω.

$$(*) \begin{cases} p^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0) & , i=0,\dots,m_0 \\ p^{(i)}(x_1) = f^{(i)}(x_1) & , i=0,\dots,m_1 \\ \vdots & \\ p^{(i)}(x_n) = f^{(i)}(x_n) & , i=0,\dots,m_n \end{cases}$$

λύνεται μονοσήμαντα.

<u>Απόδειξη</u>:

Το (*) είναι ένα γραμμικό σύστημα με $N+1$ αγνώστους (τους συντελεστές του p) και

$$(m_0+1)+(m_1+1)+\dots+(m_n+1) = \underbrace{(m_0+m_1+\dots+m_n)+n}_{=N}+1 =$$

$= N+1$ εξισώσεις.

Έστω $q \in \mathbb{P}_N$ η λύση του αντίστοιχου ομογενούς γραμμικού συστήματος. Το q έχει τουλάχιστον:

$$\underbrace{(m_0+1)}_{\text{πολλαπλότητα ρίζας } x_0}+\underbrace{(m_1+1)}_{\text{πολλαπλότητα ρίζας } x_1}+\dots+(m_n+1) = N+1$$

ρίζες (μετρώντας και την πολλαπλότητα των ριζών)

Άρα $q=0$, οπότε το αρχικό πρόβλημα (*) λύνεται μονοσήμαντα.

→ Η πιό συνηθισμένη περίπτωση παρεμβολής Hermite είναι όταν $m_0 = m_1 = \dots = m_n = 1$, δηλαδή,

Ζητείται $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ τ.ω.

$$(**) \quad \left.\begin{aligned} p(x_i) &= f(x_i) \\ p'(x_i) &= f'(x_i) \end{aligned}\right\} \quad i = 0,\dots,n$$

• Θεώρημα (Παράσταση του σφάλματος παρεμβολής τύπου Hermite)

Έστω $[a,b] \in \mathbb{R}$, $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους,

και $f \in C^{2n+2}[a,b]$

Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ το πολυώνυμο που ικανοποιεί την (**). Τότε $\forall x \in [a,b]$ $\exists \xi = \xi(x) \in (a,b)$ τ.ω.

$$(+) \quad f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2$$

Απόδειξη:

Για $x \in \{x_0, \dots, x_n\}$ η (+) ισχύει για κάθε $\xi \in (a,b)$.
Έστω $x \in [a,b]$, $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$.
Υποθέτουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $x_0 < x_1 < x < \dots < x_n$.

Έστω ότι $x \in (x_j, x_{j+1})$ για κάποιο $j \in \{0, \dots, n-1\}$

(Οι περιπτώσεις $a \le x < x_0$ και $x_n < x \le b$ αντιμετωπίζονται αντίστοιχα)

Θέτουμε $\Psi(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)^2$

και

$$\psi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\Psi(x)} \Psi(t), \text{ για } t \in [a,b]$$

Ιδιότητες της ψ:

$\psi \in C^{2n+2}[a,b]$

$$\psi(x_0) = \psi(x_1) = \cdots = \psi(x_j) = \psi(x) = \psi(x_{j+1}) = \cdots = \psi(x_n) = 0$$

→ Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Rolle υπάρχουν σημεία, $\xi_0, \dots, \xi_n$ τ.ω.

$$x_0 < \xi_0 < x_1 < \xi_1 < x_2 < \cdots < \xi_{j-1} < x_j < \xi_j < x < \xi_{j+1} < x_{j+1} < \cdots < \xi_n < x_n$$

τ.ω. $\psi'(\xi_i) = 0 \;, \; i = 0, \dots, n$

Επιπλέον

$$\psi'(x_i) = 0 \;, \quad i = 0, \dots, n.$$

Συμπέρασμα:

Η ψ' έχει στο $[a,b]$ τουλάχιστον $2n+2$ ρίζες

Rolle ↓

Η ψ'' έχει στο (a,b) τουλάχιστον $2n+1$ ρίζες

⋮

Η $\psi^{(2n+2)}$ έχει στο (a,b) τουλάχιστον 1 ρίζα, έστω ξ.

Η $\psi^{(2n+2)}(\xi) = 0$

Αλλά,

$$\psi^{(2n+2)}(t) = f^{(2n+2)}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\Psi(x)}(2n+2)!$$

Όμως, $\Psi(t) = \prod_{i=0}^{n}(t-x_i)^2 = t^{2n+2} + q(t)$, $q \in \mathbb{P}_{2n+1}$

→ Οπότε για $t=\xi$ έχουμε,

$$f^{(2n+2)}(\xi) = \frac{f(x)-p(x)}{\Psi(x)}(2n+2)! \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)-p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\Psi(x)$$

Σφάλμα παρεμβολής στη γενική περίπτωση (*):

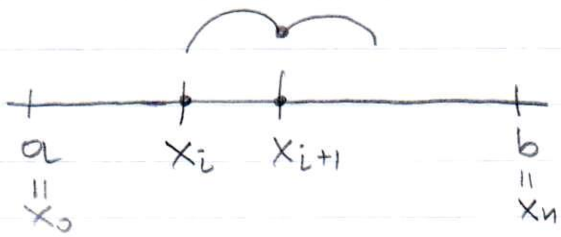
$f \in C^{N+1}[a,b]$ τότε,

$\forall x \in [a,b] \ \exists \xi = \xi(x) \in (a,b)$ τ.ω.

$$f(x)-p(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\left((x-x_0)^{m_0+1}\cdot(x-x_1)^{m_1+1}\cdot\ \dots\ \cdot(x-x_n)^{m_n+1}\right)$$

Παρεμβολή με splines

Έστω $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ ένας διαμερισμός του διαστήματος $[a,b]$. Splines ως προς αυτόν τον διαμερισμό λέγονται γενικά, συναρτήσεις που σε κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ έχουν μια συγκεκριμένη μορφή, π.χ. είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ m.



- Συχνά απαιτείται και κάποια ομαλότητα (στους κόμβους του διαμερισμού)

Θα ασχοληθούμε πρώτα με μια ειδική, ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα περίπτωση.

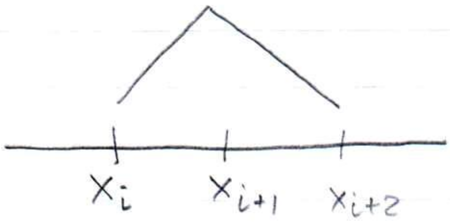
• Ορισμός (Ομαλή spline):

- Έστω $[a,b]$ ένα διάστημα, $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ ένας διαμερισμός του, και $m\in\mathbb{N}$. Τα στοιχεία του χώρου,

$$S_m(\Delta)=\{s\in C^{m-1}[a,b] : s|_{[x_i,x_{i+1}]}\in \mathbb{P}_m,\ i=0,\dots,n-1\}$$

λέγονται ομαλές (πολυωνυμικές) splines ως προς τον διαμερισμό Δ.

Στην πράξη χρησιμοποιούνται πολύ συχνά οι χώροι $\boxed{S_1(\Delta)}$ και $S_3(\Delta)$



• <u>Παρεμβολή με συνεχείς τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις</u>

$$S_1(\Delta) = \{ s \in C^1[a,b] : s|_{[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1,\ i=0,\dots,n-1 \}$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις, $\phi_0, \dots, \phi_n$

$$\phi_0(x) = \begin{cases} -\dfrac{x-x_1}{x_1-x_0} & , x \in [x_0, x_1] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & , x \in [x_{i-1}, x_i], \\ -\dfrac{x-x_{i+1}}{x_{i+1}-x_i} & , x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & , \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad i=1,\dots,n-1$$

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} & , x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Προφανώς $\phi_i \in S_1(\Delta)$, $i=0,\dots,n$

<u>Ισχυρισμός</u> : $\phi_0,\dots,\phi_n$ γραμμικά ανεξάρτητα

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \phi_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} c_i \underbrace{\phi_i(x_j)}_{=\delta_{ij}} = 0 \quad , j=0,\dots,n$$

$c_j = 0, \dots, n$

<u>Ισχυρισμός</u> : $s \in S_1(\Delta) \Rightarrow s = \sum_{i=0}^{n} s(x_i)\phi_i$

<u>Συμπέρασμα</u> : $\{\phi_0,\dots,\phi_n\}$ βάση του $S_1(\Delta)$

$$\boxed{\dim S_1(\Delta) = n+1}$$

<u>Παρεμβολή</u>

Έστω $f \in C[a,b]$. Τότε υπάρχει ακριβώς μια $s \in S_1(\Delta)$ τ.ω.

$$s(x_i) = f(x_i) \, , \; i=0,\dots,n$$

Μάλιστα,

$$\boxed{s(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\phi_i(x)}$$

<u>Θεώρημα</u> (Εκτίμηση του σφάλματος παρεμβολής με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις).

Έστω $f \in C^2[a,b]$, $\Delta: a = x_0 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$, και $s \in S_1(\Delta)$ τ.ω.

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

Αν $h = \max\limits_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})$, τότε

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - s(x)| \le \frac{h^2}{8} \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$$

• <u>Απόδειξη</u>:

Έστω $p_i \in \mathbb{P}_1$ τ.ω.

$$\begin{cases} p_i(x_i) = f(x_i) \\ p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \end{cases}$$

(Μάλιστα ισχύει ότι, $p(x) = f(x_i) + \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$)

Τώρα

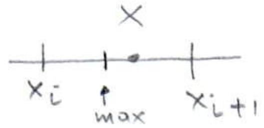
1. $\forall x \in [x_i, x_{i+1}] \quad s(x) = p_i(x)$,

2. $\forall x \in [x_i, x_{i+1}] \ \exists\ \xi(x) \in (x_i, x_{i+1})$

$$f(x) - p_i(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1})$$

Άρα, για $x \in [x_i, x_{i+1}]$, έχουμε

$$|f(x) - s(x)| \overset{1}{=} |f(x) - p_i(x)| \overset{2}{=} \frac{1}{2} |(x - x_i)(x - x_{i+1})| \cdot |f''(\xi(x))|$$



$$\le \frac{1}{2}\underbrace{(x-x_i)(x_{i+1}-x)}_{\le \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{4}} \cdot \max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

$$\le \underbrace{\frac{1}{8}h^2 \max_{a\le x\le b}|f''(x)|}_{\text{ανεξάρτητο του } i}$$

Επομένως,

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)-s(x)| \le \frac{h^2}{8}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

• <u>Παρεμβολή με κυβικές splines</u>

Έστω $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$

Ο γραμμικός χώρος $S_3(\Delta)$ αποτελείται από τις συναρτήσεις που είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο $[a,b]$ και είναι σε κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ κυβικά πολυώνυμα.

Τα στοιχεία του $S_3(\Delta)$ λέγονται κυβικές splines.

Ερώτημα: Αν $f \in C[a,b]$, υπάρχει $s \in S_3(\Delta)$ τ.ω.

$$(*) \quad s(x_i) = f(x_i), \; i=0,\dots,n \;;$$

Το $(*)$ είναι ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους τους συντελεστές της s σε κάθε υποδιάστημα.

Πλήθος αγνώστων: $4 \cdot n$
(4 συντελεστές σε καθένα των υποδιαστημάτων $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$)

Συνθήκες παρεμβολής: $2 \cdot n$

(δύο συνθήκες στα άκρα κάθε υποδιαστήματος)
Εξασφαλίζουν και συνέχεια της s!

Συνθήκες συνέχειας της s' στους κόμβους $x_1, \ldots, x_{n-1}$: $n-1$

→ Όμοια s'': $n-1$ (συνθήκες)

Συνολικά έχουμε,

$$2n + (n-1) + (n-1) = \boxed{4n-2} \text{ συνθήκες}$$

Απάντηση στο ερώτημα:

Για να έχει μοναδική λύση στο πρόβλημα παρεμβολής απαιτούνται δύο ακόμα συνθήκες!

Θεώρημα: Έστω $f \in C^1[a,b]$

και $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$. Τότε υπάρχει ακριβώς μία $s \in S_3(\Delta)$ τ.ω.

$$(1) \begin{cases} s(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n, \\ s'(x_0) = f'(x_0) \\ s'(x_n) = f'(x_n) \end{cases}$$

• <u>Θεώρημα:</u>

Έστω $f \in C^2[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$

και $\Delta_h: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a,b]$ με βήμα h.
Τότε υπάρχει μία συνάρτηση $s \in S_3(\Delta_h)$, τ.ω.

(2)
$$\begin{cases} s(x_i) = f(x_i), \ i = 0, \dots, n \\ s''(x_0) = f''(x_0) \\ s''(x_n) = f''(x_n) \end{cases}$$

• <u>Ορισμός</u>: Κυβικές splines με την ιδιότητα $s''(a) = s''(b) = 0$ λέγονται φυσικές κυβικές splines.

• <u>Θεώρημα</u>: Έστω $f \in C[a,b]$, ...

Τότε υπάρχει ακριβώς μία <u>φυσική κυβική spline</u> $s \in S_3(\Delta)$ τ.ω.

(3) $\quad s(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

→ Τα (1), (2), (3) γράφονται ως γραμμικά συστήματα με πίνακες συντελεστών με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο.

<u>Θεώρημα</u> (Εκτίμηση του σφάλματος παρεμβολής με κυβικές splines)

Έστω $f \in C^4[a,b]$, $\Delta = a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$ και $s \in S_3(\Delta)$ η παρεμβάλουσα κυβική spline που ικανοποιεί την (1).

Τότε υπάρχει σταθερά C, ανεξάρτητη στο τον Δ και την f, τ.ω.,

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - s(x)| \leq C h^4 \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|,$$

με $h = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$

Μάλιστα η μικρότερη δυνατή τιμή της C είναι

$C = \frac{5}{384}$

Συνεπώς, $\max\limits_{a \leq x \leq b} |f(x) - s(x)| \leq \frac{5}{384} h^4 \max\limits_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$

$$\Rightarrow \|f - s\|_\infty \leq \frac{5}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_\infty$$

• Κυβικές Splines του Hermite

• Ορισμός (Κυβικές splines του Hermite)

Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$ και $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του.
Συναρτήσεις $s \in C^1[a,b]$ τ.ω.

$$s\Big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3 \,, \quad i = 0, \dots, n-1$$

λέγονται κυβικές splines του Hermite ως πρός τον διαμερισμό Δ.

• Θεώρημα (Παρεμβολή με κυβικές splines του Hermite)

Έστω $f \in C^1[a,b]$ και $\Delta: a = x_0 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$.
Τότε υπάρχει ακριβώς μία κυβική spline Hermite s ως προς Δ τ.ω.

$$(4) \quad \left.\begin{aligned} s(x_i) &= f(x_i) \\ s'(x_i) &= f'(x_i) \end{aligned}\right\} \quad i = 0, \dots, n$$

Αν επί πλέον $f \in C^4[a,b]$. Τότε ισχύει,

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - s(x)| \le \frac{1}{384} h^4 \max_{a \le x \le b} |f^{(4)}(x)|$$

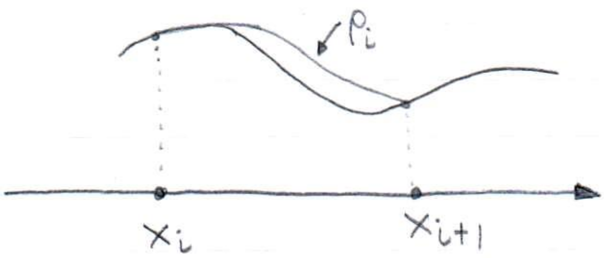
με $\quad h = \max\limits_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})$

• <u>Απόδειξη</u>:

- Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.4 (σελ. 192) υπάρχει ακριβώς ένα $p_i \in \mathbb{P}_3$ τ.ω.

$$\begin{cases} p_i(x_j) = f(x_j) \\ p_i'(x_j) = f'(x_j) \end{cases}, j = i, i+1 \quad , \quad i = 0, \dots, n-1$$

- Τότε η συνάρτηση $s : [a,b] \to \mathbb{R}$, $s(x) := p_i(x)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, είναι η μοναδική κυβική spline Hermite που ικανοποιεί την (4).



• <u>Εκτίμηση του σφάλματος</u>:

Για $x \in [x_i, x_{i+1}]$ έχουμε:

(*) $s(x) = p_i(x)$

** $\exists \xi(x) \in (x_i, x_{i+1})$

$$f(x) - p_i(x) = \frac{1}{24}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2 f^{(4)}(\xi(x))$$

Άρα, για $x \in [x_i, x_{i+1}]$ έχουμε,

$$f(x) - s(x) = \frac{1}{24}(x-x_i)^2(x_i-x_{i+1})^2 f^{(4)}(\xi(x))$$

Επομένως,
$$|f(x)-s(x)| \leq \frac{1}{24} \frac{\left[(x-x_i)(x_{i+1}-x)\right]^2}{|f^{(4)}(\xi(x))|}$$

$$\leq \frac{1}{24}\left(\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{4}\right)^2 |f^{(4)}(\xi(x))|$$

$$\leq \frac{(x_{i+1}-x_i)^4}{16 \cdot 24} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|.$$

Επομένως,

$$|f(x)-s(x)| \leq \frac{1}{384} h^4 \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$$

→ Το δεξιό μέλος της ανισότητας είναι ανεξάρτητο του x (και του i), οπότε,

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)-s(x)| \leq \frac{h^4}{384} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$$