

• 3^ο Κεφάλαιο •

Γραμμικά Συστήματα

Δεδομένα: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ $n \times n$ πίνακας
 $b \in \mathbb{R}^n$ διάνυσμα με n συνιστώσες

Ζητούμενο: $x \in \mathbb{R}^n$ τ.ω. $Ax = b$

Τέτοια γραμμικά συστήματα προκύπτουν πολύ συχνά στις εφαρμογές συνήθως ως μέρος πιο σύνθετων προβλημάτων.

Θα μας αναεχοδηθούν τα θέματα:

α) Αριθμητικές μέθοδοι για την προσέγγιση του x :

- Κόστος (απαιτούμενες πράξεις και απαιτούμενη μνήμη)

- Ευεταθία μεθόδων.

β) Κατάταξη γραμμικών συστημάτων

↳ Καταρχάς υπάρχουν δύο κατηγορίες αριθμητικών μεθόδων:

Α) Άμεσες (παράδοξες της μεθόδου απαλοιφής του Gauss): όταν οι πράξεις γίνονται ακριβώς δίνουν τη λύση x ακριβώς με πεπερασμένο πλήθος πράξεων.

β) ΕΠΟΝΑΔΗΜΕΤΙΚΕΣ

Δίνουν μια ακολουθία:

$$x^{(0)}, x^{(1)}, \dots \text{ της λύσης } x$$

Γενικά για γραμμικά συστήματα

Δεδομένα:

Συντελεστές $a_{ij} \in \mathbb{R} \quad i, j = 1, \dots, n$

Δεύτερα μέλη $b \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, n$

Ζητούμενα: $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \right\}$$

\Downarrow

Συμβολίζεται με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

και τα διανύσματα

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

γράφουμε το γραμμικό σύστημα στη
μορφή: $Ax + b$

Θα ασχοληθούμε μόνο με λ γραμμικά συστήματα που έχουν ακριβώς μια λύση.

→ Κάθε μια από τις ακόλουθες συνθήκες είναι τόσο ικανή και αναγκαία για να έχει το λ γραμ. σύστημα $Ax = b$ ΑΚΡΙΒΩΣ μια λύση.

1) Ο A είναι αντιστρέψιμος
δηλ. υπάρχει ο A^{-1}

$$(A \times A^{-1} = \text{μοναδιαίος})$$

2) $\det A \neq 0$

3) $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

↑
Προσοχή, μόνο με ασήμ
των κατευθύνσεων, το
ατίθετο ισχύει πάντα
και δεν μας λέει τίποτα.

4) Η λ γραμμές (ή οι στήλες) του A
είναι λ γραμμ. ανεξάρτητα διανύσματα

Τρόποι επίλυσης

του $Ax = b$, που γίνεται από την λ γραμ. άλγεβρα.

a) Μέθοδος του Grammer

$A = (a^1, a^2, \dots, a^n)$, δηλαδή a^i είναι η i -οστή στήλη του A



Για τον υπολογισμό του αροίθματος απαιτούνται $n!(n-1)$ πολλαπλασιασμοί.

Συνολικά για τις $n+1$ οριζούσες απαιτούνται:

$(n+1)[n!(n-1)]$ πολλαπλασιασμοί.

$$(n+1)! \cdot (n-1)$$

Αυτός ο αριθμός αυξάνει πολύ χριζορα με τον

(Υπάρχουν άλλοι τρόποι υπολογισμού οριζούσων με λιχότερες πράξεις)

β) $x = A^{-1}b$

ο A^{-1} απαιτεί βήααα,

Αν του χρειαζομαστε, την υπολογίζουμε ως εξής:

Εβτω e^1, e^2, \dots, e^n η κανονική βάση του \mathbb{R}^n
(α βήαες του I_n)

$$e_j^i = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & \text{για } i=j \\ 0 & \text{για } i \neq j \end{cases}$$

(Το δέτα του Kronecker)

Εβτω $u^i \in \mathbb{R}$ τ.ω. $Au^i = e^i, i=1, \dots, n$

Για τον υπολογισμό των u^1, \dots, u^n απαιτείται η επίλυση η συστήματος με πίνακα A .

$$\text{Τότε } A^{-1} = (u^1, u^2, \dots, u^n)$$

Πράγματι,

$$A = (u^1, u^2, \dots, u^n) =$$

$$(A \cdot u^1, A u^2, \dots, A u^n) =$$

$$(e^1, e^2, \dots, e^n) = I_n$$

Ο υπολογισμός του x από την σχέση $x = A^{-1}b$ απαιτεί την επίλυση n συστημάτων με πίνακα τον A και τον πολλαπλασιασμό $A^{-1}b$

• Δύο μεγάλες κατηγορίες ο γραμμικών συστημάτων (ή πινάκων):

α) Πυκνοί (ή αποσπικευμένοι) πίνακες
Έχουν στοιχεία οι; \neq ενικά μη μηδενικά

β) Αραιοί (ή σπαραξικοί) πίνακες
Έχουν πολλά στοιχεία μηδενικά τα οποία τα αγνοούμε για υπολογιστικό όφελος

Μέγεθος πινάκων: (οχι αυστηρός μαθημ. ορισμός)

$n < 100$: μικροί

$100 \leq n \leq 1000$: μεσαίοι

≥ 1000 : μεγάλοι

Στην πράξη δίνουμε συστήματα με πυκνούς πίνακες μέχρι μέτριο μέγεθος, ενώ με αραιούς και μεγάλου μεγέθους.

• Οι άμεγες μέθοδοι χρησιμοποιούνται κυρίως για πυκνούς πίνακες

• Οι επαναληπτικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται κυρίως για αραιούς πίνακες

→ Οι άμεγες μέθοδοι είναι παραλλαγές της μεθόδου απαλοιφής του Gauss.

Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Έστω $U = (u_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι άνω τριγωνικός πίνακας, δηλ $u_{ij} = 0$ για $i > j$

Τότε $\det U = u_{11} u_{22} \dots u_{nn}$

Άρα ο U είναι αντιστρέψιμος, αν & μόνο αν $u_{ii} \neq 0$ για $i=1, \dots, n$

Έστω $y \in \mathbb{R}^n$. Το γραμμικό συστ. $Ux = y$,

δnd

$$\left. \begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1n}x_n &= y_1 \\ u_{22}x_2 + \dots + u_{2n}x_n &= y_2 \\ &\vdots \\ u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n &= y_{n-1} \\ u_{nn}x_n &= y_n \end{aligned} \right\}$$

λύνεται εύκολα με οπισθοδρόμηση:

Λύνουμε την τελευταία εξίσωση ως προς x_n , αντικαθιστούμε το x_n στην προτελευταία εξίσωση και βρίσκουμε το x_{n-1} , κλπ και, τέλος, αντικαθιστούμε τα x_{n-1}, \dots, x_n στην πρώτη εξίσωση και βρίσκουμε το x_1 .

Αλγόριθμος της Οριζοδρόμησης

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}} \quad \text{για } k = n-1, n-2, \dots, 1$$

$$x_k = \frac{1}{u_{kk}} \left[y_k - \sum_{j=k+1}^n u_{kj} x_j \right]$$

$$\sum_{j=k+1}^n u_{kj} x_j = y_k \Rightarrow$$

$$u_{kk} x_k = y_k - \sum_{j=k+1}^n u_{kj} x_j$$

30/3/17

Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Έστω $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ αντιστρέψιμος άνω τριγωνικός πίνακας.

$$Ux = y$$

• Αλγόριθμος της οριζοδρόμησης •

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}} \quad \text{για } k = n-1, n-2, \dots, 1$$

$$x_k = \frac{1}{u_{kk}} \left[y_k - \sum_{j=k+1}^n u_{kj} x_j \right]$$

Απαιτούμενες πράξεις:

Διαιρέσεις: n

Ποι/βίους & πρόσθεσεις: $1+2+\dots+(n-1) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$

Απαιτούμενη μνήμη: $\frac{n^2}{2} + O(n)$ για τα u_{ij} και y_j

Τα x_i αποθηκεύονται στις θέσεις των y_i

• Ίδρα στην μέθοδο απαλοιφής του Gauss

Με κατάλληλους μετασχηματισμούς γραμμών (δηλ. με εναλλαγή δύο εφιδώσεων ή πρόσθεση κατά μέλη ενός ποι/βίου μιας εφιδώσης σε μια άλλη) μετατρέπουμε ένα σύστημα $Ax=b$ σε ένα ισοδύναμο $Ux=y$ με ανώ τριγωνικό πίνακα U

Η διαδικασία αυτή ονομάζεται τριγωνποίηση.
Μετά λύουμε το $Ux=y$ με σπινθοδρόμηση

Άρα 2 στάδια: Τριγωνποίηση \rightarrow σπινθοδρόμηση

Γενική περιγραφή

$Ax=b$ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ αντιστρέψιμος

Θέτουμε $A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)}) = A$, $b^{(1)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix} = b$

Και γράφουμε το $Ax=b$ στην μορφή

$$A^{(1)}x = b^{(1)}$$

Τριγωνοποίηση

2^ο βήμα: Υπόθεση: $a_{11}^{(1)} \neq 0$

Μπορεί να επιτευχθεί
με άλλες επιβιώσιμες

Πολλαπλασιαστές:

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad i = 2, \dots, n$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί m_{i1}
την αφαιρούμε από την i -οτή εξίσωση
και αντικαθιστούμε την i -οτή εξίσωση
με το αποτέλεσμα για $i = 2, \dots, n$

Επί μετά το πρώτο βήμα παίρνουμε
το σύστημα:

$$A^{(2)} x = b^{(2)} \quad \mu\epsilon$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\text{και} \quad a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}^{(1)}, \quad i, j = 2, \dots, n,$$
$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1} b_1^{(1)}, \quad i = 2, \dots, n$$

με τις πρώτες r γραμμές του $A^{(r+1)}$ και τις πρώτες r συνιστώσες του $b^{(r)}$ ίδιες με των $A^{(r)}$ και $b^{(r)}$, αντίστοιχα, και:

$$\begin{cases} a_{ij}^{(r+1)} = a_{ij}^{(r)} - m_{ir} a_{rj}^{(r)}, & i, j = r+1, \dots, n, \\ b_i^{(r+1)} = b_i^{(r)} - m_{ir} \cdot b_r^{(r)}, & i = r+1, \dots, n, \end{cases}$$

και τα στοιχεία $a_{ij}^{(r+1)} = 0$, $i = r+1, \dots, n$
 $j = 1, \dots, r$

Υστερα από $n-1$ βήματα προκύπτει το σύστημα $A^{(n)} x = b^{(n)}$ με άνω τριγωνικό πίνακα $A^{(n)}$. Εδώ τελειώνει η τριγωνοποίηση και μετά λύουμε το σύστημα $A^{(n)} x = b^{(n)}$ με οπισθοδρόμηση.

◦ Απαιτούμενες πράξεις και μνήμη ◦

Το πλήθος των προθαφαιρέσεων είναι περίπου ίδιο με το πλήθος των πολλαπλασιασμών. Έχει επισημανθεί να μετράμε ως αριθμητικές μόνο τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.

Τριγωνοποίηση:

1^ο βήμα: Για τον υπολογισμό των πολλαπλασιασμών m_{ij} , $i=2, \dots, n$ απαιτούνται $n-1$ πράξεις

Για τον υπολογισμό των $a_{ij}^{(k)}$, $i, j=2, \dots, n$, απαιτούνται $(n-1)^2$ πράξεις

βήμα r

πολλαπλασιασμοί: $n-r$
στοιχεία του A : $(n-r)^2$

Για τον Α (και τους πολλαπλασιαστές) απαιτούνται
συνολικά για $n-1$ βήματα,

$$\sum_{i=1}^{n-1} [(n-i)^2 + (n-i)] = \frac{n^3 - n}{3} \text{ πράξεις}$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Για το διάνυσμα b , απαιτούνται $n-i$ πράξεις
στο βήμα i , οπότε συνολικά

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ πράξεις}$$

Για την επιβροδρόμηση: $\frac{n^2 + n}{2}$ πράξεις

Συνολικό κόστος:

$$\frac{n^3 + 3n^2 + n}{3} = \frac{n^3}{3} + O(n^2)$$

Παράδειγμα

$$\boxed{n=20}$$

Εάν ο υπολογιστής εκτελεί 10^6 πράξεις/sec
με την μέθοδο απαλοιφής του Gauss απαιτούνται
 $\frac{16 \cdot 10^3}{3}$ seconds.

Μέθοδος Cramer: Για τους $21! \cdot 19$ πολ/γμούς
απαιτούνται

$$3 \cdot 10^5 \text{ ΑΙΩΝΕΣ}$$

Απαιτούμενη μνήμη:

Για τον A: n^2 Θέσεις μνήμης
Για τον b: n " "

Δεν απαιτείται επι πλεον μνήμη
γιατί οι πολλαπλασιαστές m_{ir} , $i=r+1, \dots, n$
αποθηκεύονται στις θέσεις των στοιχείων
 a_{ir} , $i=r+1, \dots, n$, οι πολλαπλασιαστές αποθηκεύονται
στις θέσεις (i, j) $i > j$ του πίνακα A.
Τα νέα στοιχεία υπολογίζονται από
τους τύπους

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} - m_{ir} a_{rj}, \quad i, j = r+1, \dots, n$$

(Τα m_{ir} παίρνουν τα ονόματα των
αντίστοιχων a_{ir})

Παρατήρηση: (Υπολογισμός ορίστου)

$$\det A = (-1)^m \det A^{(n)}$$

$$= (-1)^m a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \dots a_{nn}^{(n)}$$

με m το πλήθος των εναλλαγών
γραμμών στην Τριγωνοποίηση

Απαιτούμενες πράξεις: $\frac{n^3}{3} + O(n)$ πράξεις

Κόστος της μεθόδου του Cramer για την
επίλυση ενός $n \times n$ γραμμικού συστήματος

$$(n+1) \left(\frac{n^3}{3} + O(n) \right) = \frac{n^4}{3} + O(n^3)$$

Ασύμφορη η μέθοδος σε σχέση με
τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss

Οδηγήσει:

Τα στοιχεία $a_{ii}^{(k)}$ γίνονται οδηγία

Παράδειγμα:

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{*} \quad 10^{-4} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Αριθμ. λύση} \quad \left. \begin{aligned} x_1 &= 1.0001 \dots \\ x_2 &= 0.9998 \dots \end{aligned} \right\}$$

$$\beta=10, \quad t=3, \quad u=90, \quad L=-90 \quad (\text{βτροφ. ιδιότητες})$$

$$\text{Προβλεπτική λύση:} \quad \left. \begin{aligned} \tilde{x}_1 &= 0 \\ \tilde{x}_2 &= 1 \end{aligned} \right\} \text{πάλι κακή!}$$

$$\text{Επίλυση:} \quad m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 10^4$$

$$a_{22}^{(2)} = f_2(a_{22}^{(1)} - m_{21} \cdot a_{12}^{(1)})$$

$$= f_2(1 - 10^4) = f_2(-9999)$$

$$= -10^4$$

εξαρτίζεται η
πληρότητα από
την 2^η εσίσωση

$$b_2^{(2)} = f_2(b_2^{(1)} - m_{21} b_1^{(1)}) = f_2(2 - 10^4) = -10^4$$

$$10^{-4} x_1 + x_2 = 2$$

$$-10^{-4} x_2 = -10^4 \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{x}_2 = 1$$

$$\tilde{x}_1 = 0$$

31/3/17

Άσκηση 2.1

• $U, W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ άνω τριγωνικοί

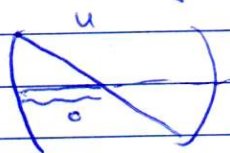
$\Rightarrow U \cdot W$ άνω τριγωνικός

• $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ άνω τριγωνικός και αντιστρέψιμος

$\Rightarrow U^{-1}$ άνω τριγωνικός

(άνοδοξα για κάτω τριγωνικούς)

Απόδειξη



$$(UW)_{ij} = \sum_{k=1}^n U_{ik} W_{kj} = \sum_{k=i}^n U_{ik} W_{kj} =$$

$$U_{ij} = U_{i,i-1} = \dots = U_{i,i-j} = 0$$

$$= U_{ii} W_{ij} + U_{i,i+1} W_{i+1,j} + \dots + U_{in} W_{nj}$$

για $i > j$ έχουμε

$$W_{ij} = W_{i+1,j} = \dots = W_{nj} = 0,$$

Επομένως

$$(UW)_{ij} = 0 \text{ για } i > j$$

Οπότε 0 UW είναι
άνω τριγωνικός

$$U x^k = e^k$$

Με e^1, \dots, e^n την κανονική βάση του \mathbb{R}^n

$$\text{Τότε } U^{-1} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$$

Ο U^{-1} είναι άνω τριγωνικός, αν και μόνο αν για κάθε $k \in \{1, \dots, n-1\}$ ισχύει

$$x_{k+1}^k = \dots = x_n^k = 0$$

$$\text{Τώρα } U x^k = e^k \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_k^k \\ x_{k+1}^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

* Θεωρ k

Λύνουμε το σύστημα με το σύστημα της οριζοδρόμησης

$$\text{Προκύπτει: } 0 = x_n^k = x_{n-1}^k = \dots = x_{k+1}^k$$

Άσκηση 3.3

$A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$, A αντιστρέψιμος
 $b \in \mathbb{R}^n$

- $A^{-1} b$
- $A^{-1} B A^{-1} b$

$$\begin{aligned} x = A^{-1} b &\Leftrightarrow A^{-1} x = b \\ &\Leftrightarrow A \cdot \underbrace{(A^{-1} x)}_y = b \end{aligned}$$

$y = ?$ Λύνουμε τα εφής συστήματα

$$\begin{aligned} A y &= b \\ &\downarrow \\ z = ? \quad A z &= y \\ &\downarrow \\ w = ? \quad A x &= w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A^{-1} x = y) &\in \\ A(A^{-1} x) &= y \\ &\downarrow \\ z & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^2 x &= z \\ A(Ax) &= z \\ &\downarrow \\ w & \end{aligned}$$

$w = ?$ Λύνουμε 4 ζευγ. συστήματα με τον ίδιο πίνακα.

• Βρίσκουμε πρώτα το $y (= A^2 x)$, μετά το $z (= A^3 x)$,
μετά το $w (= Ax)$ και τέλος το x

□ $x =: A^{-2} B \cdot A^{-1} b \quad (\Leftrightarrow)$

$Ax = B \cdot A^{-2} b$ Εμφανίζεται πάλι το A^{-2}

Θετούμε $y = A^{-2} b$

• y : υποδοχίζεται δυνατότα το γραμμικό σύστημα $A \cdot y = b$

• Μετά υποδοχίζουμε το By

• και δίνουμε το $Ax = \underbrace{By}_B$

Άσκηση 3.6

$i \in \{1, \dots, n-2\}$

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & a_{i+1,i} & & \\ & & a_{in} & & 1 \end{pmatrix}$$

v.s.o

$$A_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & -a_{i+1,i} & & \\ & & -a_{in} & & 1 \end{pmatrix}$$

για $i < j$ τότε

$$A_i A_j = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & a_{i+1,i} & & \\ & & a_{in} & & 1 \end{pmatrix}$$

Απόδειξη

$$AB = A + B - I_n + (A - I_n)(B - I_n)$$

$$\text{Για } i \leq j \quad (A_i - I_n)(A_j - I_n) = 0$$

$$(A_i - I_n)(A_j - I_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα} \quad A_i A_i^{-1} &= A_i + A_i^{-1} - I_n + \underbrace{(A_i - I_n)(A_i^{-1} - I_n)}_{=0} \\ &= \underbrace{A_i + A_i^{-1}}_{= 2I_n} - I_n \\ &= 2I_n - I_n = I_n \end{aligned}$$

$$\text{Γενικά} \quad A_i A_j = A_i + A_j - I_n$$

Οδήγηση

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} (*) \quad 10^{-4} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 1.0002 \dots \\ x_2 = 0.9998 \dots \end{cases}$$

$\beta = 10, t = 3, \ell = -20, u = 20,$ Στιραγγυλευσών

Προσεγγιστική λύση $\begin{cases} \tilde{x}_1 = 0 \\ \tilde{x}_2 = 2 \end{cases}$ πολύ καλή!

Εξήγηση: Λόγω του πολύ μικρού οδύου
 10^{-9} (σε απόλυτη τιμή)

→ Προσέχετε μεγάλο πολλαπλασιαστή
ως και στο οδύου στο άσχυρο
αποτελέσμα.

Εναλλαγή γραμμών

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2 \\ 10^{-9}x_1 + x_2 = 1 \end{array} \right\} \textcircled{1}$$

Στον υπολογιστή μας παίρνουμε
προβλεπτική λύση

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{x}_1 = 1 \\ \tilde{x}_2 = 1 \end{array} \right\} \text{ πολύ καλή}$$

Μερική οδύου (ή οδύου
κατά γραμμές)

Στο βήμα r της τριγωνοποίησης
εξετάζουμε τα στοιχεία $a_{kr}^{(i)}$, $k=r, r+1, \dots, n$
της r -στής, υποτίθεται του $A^{(i)}$ βρίσκουμε
με μεγαλύτερη απόλυτη τιμή και με
εναλλαχές γραμμών το φέρνουμε στην
θέση του οδύου.

Επι πλέον κόστος: $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$ πράξεις

Παρατήρηση: Ο όρος "πολύ μικρός οδύος"
είναι ασαφής π.χ. το $\textcircled{1}$
γραφεται ισοδύναμα στην μορφή

$$\begin{array}{l} x_1 + 10^9 x_2 = 10^9 \\ 1 \cdot x_1 + x_2 = 2 \end{array}$$

Ο υπολογιστής μας δίνει $\tilde{x}_1 = 0$
 $\tilde{x}_2 = 1$

Ενώ με εναλλαχί γραμμών δίνει

$$\tilde{x}_1 = 1$$

$$\tilde{x}_2 = 1$$

□ Ο πραγματικός λοχός της αποτυχίας
στην πρώτη περίπτωση είναι το
μέγεθος του $|a_{12}|$ σε σύγκριση με το
 $|a_{22}|$. Πραγματικά έχουμε

$$\left| \frac{a_{11}}{a_{12}} \right| = 10^{-4},$$

με εναλλαχί γραμμών

$$\left| \frac{a_{21}}{a_{22}} \right| = 1$$

Ολική οδύνηση (ή οδύνηση κατά γραμμές
και στήλες)

Στο βήμα i της τριγωνοποίησης
με εναλλαγές γραμμών και στήλων
φέρνουμε στη θέση του οδηγού $a_{ii}^{(i)}$
ένα από τα στοιχεία του υποπίνακα
 $a_{kz}^{(i)}$, $k, z = i, \dots, n$ με τη μέγιστη απόλυτη
τιμή (Προβοχή εναλλαγών των στήλων
 r και s απαιτεί την μεταστροφή των
αντιστοιχών αγνώστων x_r σε x_s και
 x_s σε x_r)

Επι πλέον κόβτος

$$\frac{n^3}{3} + O(n^2)$$

Ουσιαστικά συντάσσεται το κώβτος

- Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss χωρίς οδηγίες θεωρείται αβίθις αριθμός. Για κάποιες κατηγορίες συστημάτων, π.χ. όταν ο A είναι θετικά ορισμένος, δηλαδή

$\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, x^T A x > 0$
είναι ευσταθής, και μόνο σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιείται.

- Η μέθοδος της ολικής οδηγίας θεωρείται ευσταθής αριθμός στην πράξη. Χρησιμοποιείται σπάνια γιατί διπλασιάζει το κόστος.

Η πιθανότητα να είναι αβίθις η μερική οδηγία είναι πολύ μικρή. Χρησιμοποιείται πολύ συχνά γιατί επι πλείον αυξάνει το γενικό κόστος.

- Ο αριθμός της απαλοιφής του Gauss στην πράξη

→ Ο αριθμός της απαλοιφής του Gauss για την επίλυση γραμμικών συστημάτων $Ax = b$ φράζεται στην πράξη σε 2 στάδια:

- Στο πρώτο στάδιο εκτελούνται οι υπολογισμοί της τριγωνοποίησης που αφορούν μόνο τον πίνακα A

- Στο δεύτερο στάδιο χρησιμοποιούνται τα αποτελέσματα του πρώτου και το b και υπολογίζεται η λύση x

Γνωστό γεγονός: DECOMP
SOLVE

DECOMP: Υλοποιεί το πρώτο στάδιο.

Έχει ως είσοδο τα στοιχεία του A , που αποθηκεύονται σε n^2 θέσεις μνήμης. Εκτελεί απαλοιφή Gauss με κέρμη οδήγηση.

Το τελικό προϊόν του A αποθηκεύεται στο άνω "τρίγωνο" του αρχικού πίνακα ενώ στις θέσεις (i, j) με $i > j$ αποθηκεύονται οι πολλαπλασιαστές m_{ij} . Καταγράφονται επίσης τυχόν εναλλαγές δαμμών (σε ένα διάνυσμα με n συνιστώσες).

κόστος

$\frac{n^3}{3} + O(n^2)$ πράξεις

$n^2 + O(n)$ θέσεις μνήμης.

SOLVE: χρησιμοποιεί τον είσοδο τα αποτελέσματα της DECOMP και το b εκτελεί τις πράξεις που αφορούν το b , και με οπισθοδρόμηση υπολογίζει το x . Το x αποθηκεύεται στη θέση του b .

κόστος

$n^2 + O(n)$ πράξεις

n θέσεις μνήμης

4/4/17

Ο αλγόριθμος απαλοιφής του Gauss
στη πράξη

Εφαρμογή: Εβίω ότι θέσαμε να
λύσουμε m γραμμικά συστήμα-
τα με τον ίδιο πίνακα A και
δεξιά μέλη b, b', b'', \dots

Καλούμε μια φορά τον DECOMP
(που κάνει τις πράξεις που αφορούν
την τριγωνοποίηση του A), και
 m φορές τη SOLVE μια για
κάθε δεξιο μέλος b, b', \dots

Συνολικό κόστος: $\frac{n^3}{3} + O(n^2) + m(n^2 + O(n))$
πράξεις

Παράδειγμα: Υπολογισμός A^{-1}

Λύουμε τα n γραμμικά συστήματα

$$Au^i = e^i \quad i=1, \dots, n$$

με e^1, \dots, e^n την κανονική
βάση του \mathbb{R}^n

Τότε έχουμε $A^{-1} = (u^1, u^2, \dots, u^n)$

Συνολικό κόστος: $\frac{n^3}{3} + O(n^2) + n\left(\frac{2}{3}n^2 + O(n)\right)$
 $= n^3 + O(n^2)$ πράξεις

Μνήμη: $gn^2 + O(n)$

Η αναγωγή LU

Η φάση της τριγωνοποίησης ενός πίνακα ανιβερσίμου $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ βάσει της αποδοχής του Gauss, μπορεί να βε \downarrow λάβει πίνακων ως αναγωγή του A βε \downarrow γινόμενο,

$$A = P^{-1}LU \text{ με πίνακες } P, L, U \in \mathbb{R}^{n,n}$$

Οι οποίοι έχουν τις εξής ιδιότητες:

- Ο P είναι πίνακας μετάθεσης καταγράφει τις εναλλαγές \downarrow γραμμών που είναι κατά την αποδοχή.

(Ένας πίνακας μετάθεσης προκύπτει από τον μοναδιαίο πίνακα I_n με εναλλαγές \downarrow γραμμών, Αποθνεύεται βε ένα διάκερα με n συνιστώσες)

- Ο L είναι κάτω τριγωνικός με μονάδες στην διαγώνιο και κάτω από τη διαγώνιο περιέχει τους πολλαπλασιαστές u_{ij} (τα διαγώνια στοιχεία δεν αποθνεύονται)
- Ο U είναι άνω τριγωνικός και είναι το τελικό προϊόν $A^{(n)}$ της τριγωνοποίησης του πίνακα A . Για τη αναγωγή απαιτούνται ακριβώς οι ίδιες πράξεις με τη τριγωνοποίηση. τη αναγωγή θα τη αποδοχούμε βε \downarrow για να λύσουμε το $Ax = b_j$

- Ρ ατιστρέφσιμος

$$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \\ \Leftrightarrow L^{-1}PAx = L^{-1}Pb \\ \downarrow \\ y$$

a) Αναδιάσμε τον PA σε γινόμενο LU

β) υπολογισμός x

β₁) \rightarrow κατασκευάζουμε το διάνυσμα Pb (με εναλλαγή συνιστωσών του b). και επιλύουμε το σύστημα Ly = Pb

Ο L είναι κάτω τριγωνικός και η επίλυση του Ly = Pb μπορεί να γίνει με τρόπο εντελώς αντίστοιχο της οπισθοδρομικής.

\rightarrow Από την πρώτη εξίσωση υπολογίζουμε το y₁, το αντικαθιστούμε ε και υπολογίζουμε το y₂ κλπ

β₂) λύουμε το Ux = y με οπισθοδρομική

A φάση β αντικαθιστεί βτW solve ενώ η α) βτW DECOMP

Απόδειξη
της ααδύσης $A = P^{-1}LU$

1^η περίπτωση: υποθέτουμε ότι κατά την αναδιάσμε δεν γίνονται εναλλαγές γραμμών (δηλ P = In)

Ορίζουμε τον πίνακα $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -u_{21} & 1 & & \\ -u_{31} & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ -u_{n1} & & & & 1 \end{pmatrix}$

και έχουμε ότι $A^{(2)} = M_1 A$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $* A^{(n)} = M_{n-1} \dots M_2 M_1 A$

με $M_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ όπου $i=1, 2, \dots, n-1$

που δίνονται ως:

$$(M_i)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{για } i=j \\ -m_{ir} & \text{για } i=r+1, \dots, n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Παρατηρείται ότι M_i είναι κάτω τριγωνικός πίνακας με μονάδες στη διαγώνιο, με στοιχεία $-m_{ir}$, $i=r+1, \dots, n$, στην οριζόντια r και από την διαγώνιο και παντού αλλού μηδέν. Οι M_i είναι αντιστρέψιμοι, $\det=1$, και

$$(M_i^{-1})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{για } i=j \\ m_{ir} & \text{για } i=r+1, \dots, n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Αθ. 3-6

Άρα από την $*$ παίρνουμε

$$A = M_j^{-1} \dots M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1} A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ m_{12} & 1 & & & \\ m_{13} & m_{23} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ m_{1n} & m_{2n} & \dots & m_{n-1,n} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Άρα } A = L(A^{(n)}) (=U)$$

9^η περίπτωση : κατά τη διαδικασία Gauss
 επιτρέπονται και εναλλαγές γραμμών
 είτε για να βρούμε οδηγούς
 αii ≠ 0 είτε για μερική οδηγού

Η γραμμή του πίνακα A τη οποία στο
 βήμα i φέρνουμε στη θέση του οδηγού
 (είδη τη εναλλάσσουμε με τη i-ετή
 γραμμή) ούτε αλλάζει πλέον θέση
 ούτε τα στοιχεία της αλλοιώνονται κατά
 τη διάρκεια της απαλοιφής. Επομένως,
υπάρχει μια μετάθεση των γραμμών του
 πίνακα A που αν τη κάνουμε πριν
 από το πρώτο βήμα της απαλοιφής
 θα οδηγούσε σε ένα πίνακα A', η
 τριγωνοποίηση του οποίου θα μπορούσε
 να γίνει χωρίς εναλλαγές γραμμών
 Αρα, σύμφωνα με τη 2^η περίπτωση
 $A = LU$ με L, U πίνακες με τις
 επιθυμητές ιδιότητες.

Θα δούμε τώρα ότι ο A' προκύπτει από
 τον A με πολλαπλασιασμό από τα αριστερά
 με ένα πίνακα μετάθεσης P.

(τότε $A' = PA$, οπότε $PA = LU$, $A = P^{-1}LU$)

Εστω

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

μια μετάθεση των αριθμών

$1, \dots, n$. Ο αντίστοιχος πίνακας
 μετάθεσης προκύπτει από τον I_n αν
 μεταθέσουμε τις γραμμές του και η
 i_k γραμμή του P είναι η i γραμμή
 του I_n

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

μετάθεσης

$$\rightsquigarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

αριθμ. πίνακας μετάθεσης

Η $3^{\text{η}}$ γραμμή του P είναι η $1^{\text{η}}$ του U
η $1^{\text{η}}$ " " " " " " " " " " " "
η $2^{\text{η}}$ " " " " " " " " " " " "

Τώρα το γινόμενο PA προκύπτει από τον A με τις ίδιες αριθμ. εντάξεις γραμμών που από τον U οδηγούν στον P. Στο προηγούμενο παράδειγμα:

$$PA = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

Συμπέρασμα: Στον πίνακα A' στην δεύτερη περίπτωση οδηγούμετε πολύ εύκολα από αριστερά του A με ένα κατάλληλο πίνακα μετάθεσης P

πχ

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad P = I_2$$

Απόδοξη Gauss με $m_{21} = \frac{1}{2}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

επαλήθευση: $LU = \dots = A$

2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Ανάδοξη Gauss

$$m_{21} = \frac{1}{2}, \quad m_{31} = \underline{1} \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

0 αγγ⁽²⁾ είναι μηδέν

⇒ 0 A δεν ανατίεται
 GE γίνεται L·U χωρίς
 εναλλαγές γραμμών

με $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Εξουπε

$$PA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \textcircled{B}$$

Ανάδοξη Gauss $m_{21} = 1$
 $m_{31} = \frac{1}{2}$

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = U \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Εξουπε ότι $B = PA = LU \Rightarrow A = P^{-1}LU$

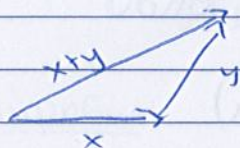
$$P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

εναλθθ. (PA=LU)

6/4/2017

⊙ Normes Διαμετρήτων και Πινάκων

Για να μετρήσουμε την κατάστασι φραγμοτήτων βύθιματων πρέπει να μπορούμε να μετράμε αποστάσεις μεταξύ διαμετρήτων και μεταξύ πινάκων. Ένα βασικό μέσο για αυτόν τον σκοπό είναι η νόρμα. Η νόρμα αποτελεί γενικευμένη απόλυτης τιμής.



Ορισμός (Νόρμα) Έστω X ένας φραγμένος όρος στο \mathbb{R} ή στο \mathbb{C} , και $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, α αριθμός για απόλυτη:

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$$

Λέγεται νόρμα (για όλη, norm) α ιδιότητες:

- (N1) $\forall x \in X \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (N2) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in X \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- (N3) $\forall x, y \in X \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Τριγωνική ανισότητα)

i) $\forall x \in X \quad \|x\| > 0$

$$\stackrel{N1}{0} = \|x - x\| = \|x + (-x)\|$$

$$\leq \|x\| + \underbrace{\| -x \|}_{\stackrel{N2}{\|x\|}} = 2\|x\|$$

$$\uparrow \quad \uparrow$$

N3 N2

ii) Τριγωνική ανισότητα προς τα κάτω

$$\forall x, y \in X \quad \|x-y\| \geq |\|x\| - \|y\||$$

$$\|x\| = \|(x-y) + y\| \stackrel{N3}{\leq} \|x-y\| + \|y\|$$

$$\Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$$

Ακρίβως αντίστοιχα, $\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$
 οπότε τελικά $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$

Παραδείγματα

1. $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ με $\|x\| := |x|$, για $x \in \mathbb{R}$
 $(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$ με $\|z\| := |z|$, για $z \in \mathbb{C}$

2. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ με $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$, όπου

$$x = (x_1, \dots, x_n)^T \quad (1\text{-νόρμα})$$

Πράξεις

(N1) $x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \Leftrightarrow$

$$x_i = 0, \quad i = 1, \dots, n \Leftrightarrow$$

$$x = 0$$

(N2) $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^n |\lambda| \cdot |x_i|$$

$$= |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda| \|x\|_1$$

(N3) $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i + y_i|}_{\leq |x_i| + |y_i|} \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)$$

$$= \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

3. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ με $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

∞ -νόρμα " νόρμα μεγίστου.

$$c_1. (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \text{ με } \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$$

(l_2 -νόρμα, ευκλείδεια νόρμα)

Οι (N1) και (N2) αποδεικνύονται πολύ εύκολα. Θεωρούμε το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^n ,

$$(x, y)_2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

Παρατήρηση

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)_2}$$

Ανισότητα των Cauchy-Schwarz^(*)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad |(x, y)_2| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

Απόδειξη

• Για $y=0$ τετριμμένο

• Για $y \neq 0$, τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y) =$$

$$= (x, x)_2 + 2\lambda (x, y)_2 + \lambda^2 (y, y)_2$$

$$= \|x\|_2^2 + 2(x, y)_2 \lambda + \|y\|_2^2 \lambda^2$$

Έκρινε και αναγκαία συνθήκη

$$ax^2 + bx + c$$

$$\Delta \leq 0$$

$$\Delta = (2(x, y)_2)^2 - 4 \cdot \|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2$$

Αρα

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x,y)^2} \leq \sqrt{\|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2}$$

$$\Leftrightarrow |(x,y)_2| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

Τριγωνική ανισότητα

$$\|x+y\|_2^2 = (x+y, x+y)_2 = \|x\|_2^2 + 2(x,y)_2 + \|y\|_2^2$$

$$\leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$$

Παραδείγματα

5. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ με $p=1, 2, \infty$

για $x \in \mathbb{R}^n$ ορί $\|x\|_p$ ορίζεται
όπως προηγουμένως. Η $\|\cdot\|_2$ παράγεται από το
εξωτερικό γινόμενο $(\cdot, \cdot)_2$, $(x,y)_2 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$

με y_i τον συζυγή του y_i

6. $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ με $\|f\|_\infty := \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$
(νόρμα μεγίστου)

Πράξεις

$$(N_1) \quad f \in C[a, b] \quad \|f\|_{\infty} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\Leftrightarrow f = 0$$

$$(N_2) \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in C[a, b]$$

$$\|\lambda \cdot f\|_{\infty} = \max_{a \leq x \leq b} |\lambda \cdot f(x)|$$

$$= \max_{a \leq x \leq b} (|\lambda| \cdot |f(x)|)$$

$$= |\lambda| \cdot |f(\tilde{x})| = |\lambda| \cdot \|f\|_{\infty}$$

με κατάλληλο $\tilde{x} \in [a, b]$

$$(N_3) \quad f, \varphi \in C[a, b]$$

$$\|f + \varphi\|_{\infty} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) + \varphi(x)|$$

$$= |f(\tilde{x}) + \varphi(\tilde{x})|$$

$$\leq |f(\tilde{x})| + |\varphi(\tilde{x})|$$

$$\leq \|f\|_{\infty} + \|\varphi\|_{\infty}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ (Ισοδύναμες Νόρμες)

Έστω X ένας γραμμικός χώρος. Δύο νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ λέγονται ισοδύναμες (ή συμφιθίμες), α υπάρχουν θετικές σταθερές m και M τ.ω.

$$\forall x \in X \quad m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|$$

$$(i \text{ ισοδύναμα } \frac{1}{M}\|x\|' \leq \|x\| \leq \frac{1}{m}\|x\|')$$

ΠΡΟΤΑΣΗ (31) (Ισοδύναμια νόρμών στον \mathbb{R}^n)

Όλες οι νόρμες στον \mathbb{R}^n είναι ισοδύναμες μεταξύ τους.

ΟΡΙΣΜΟΣ (Συμπίκτηση ακολουθίας).

Λέμε ότι μια ακολουθία $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ συμπίπτει ως προς την νόρμα $\|\cdot\|$ του X , α υπάρχει $x \in X$ (το όριο της ακολουθίας ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$) τ.ω

$$\|x^{(n)} - x\| \rightarrow 0 \quad \left(\begin{array}{l} a_n \rightarrow a, \quad n \rightarrow \infty \text{ (ε)} \\ |a_n - a| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \end{array} \right)$$

γράφουμε $x^{(n)} \rightarrow x$ για $n \rightarrow \infty$

$$i \quad x = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} \text{ (ως προς τη νόρμα } \|\cdot\|)$$

Νόρμες πινάκων

Μια απεικόνιση $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n,m} \rightarrow \mathbb{R}$

Λέγεται νόρμα πινάκων, αν ικανοποιεί τις (N_1) , (N_2) , (N_3) και

$$(N_4) \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,m} \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Θα ασχοληθούμε με μια ειδική κατηγορία νόρμων πινάκων, τις φυσικές νόρμες πινάκων

Ορισμός (φυσική νόρμα πινάκων)

Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον \mathbb{R}^n
Η απεικόνιση $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n,m} \rightarrow \mathbb{R}$,
$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

είναι (max)

Λέγεται φυσική νόρμα πινάκων ή παραγόμενη

από την νόρμα $\|\cdot\|$ του \mathbb{R}^n

Σημαντικά ιδιώματα

$$(*) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

για $x=0$, η $(*)$ είναι προφανής.

για $x \neq 0$, έχουμε

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|, \quad \text{άρα} \quad \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

7/4/17

Άσκηση 3.7

 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ αντιστρέψιμοςΈστω $A = LU$ υπό: n αδιάφορα είναι μοναδικά.Απόδειξη

$$A = LU = \tilde{L}\tilde{U} : \Rightarrow$$

$$\tilde{L}^{-1} L \cdot \underbrace{U \tilde{U}^{-1}}_{\tilde{I}_n} = \underbrace{(\tilde{L}^{-1} \cdot \tilde{L})}_{\tilde{I}_n} \cdot \tilde{U} \cdot U^{-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{\tilde{L}^{-1} L = \tilde{U} \cdot U^{-1}}$$

Σύμφωνα με την Ασκ. 3.1 στο αριστερό μέλος έχω έναν κάτω τριγωνικό πίνακα ενώ στον δεξιό έναν άνω τριγωνικό πίνακα. Επομένως, ο πίνακας είναι διαγώνιος, οπότε

$$\tilde{L}^{-1} \cdot L = \tilde{U} \cdot U^{-1} = D$$

$$\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$$

Πόρισμα : $D = I_n$ Πράγματι, έχουμε $\tilde{L}^{-1} L = D \Rightarrow$

$$L = \tilde{L} D,$$

οπότε :

$$L_{ij} = \tilde{L}_{ij} \cdot d_{ii}, \quad i=1, \dots, n$$

Αλλά $L_{ii} = \tilde{L}_{ii} = 1$, οπότε $\rightarrow \underline{d_{ii} = 1, i=1, \dots, n}$

Αρα $\tilde{L}^{-1} L = I_n \longrightarrow L = \tilde{L}$

$\tilde{U} U^{-1} = I_n \longrightarrow \tilde{U} = U$

Άσκηση 3.10:

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

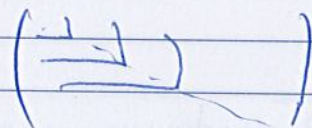
$\delta_1 = a_{11}, \quad \delta_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \dots$

$\delta_{n-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$

Μικρές υποομάδες του A

Υπόθεση: $\delta_i \neq 0, i=1, \dots, n-1$

υπό: $A = LU$



Απόδειξη:

Το πρώτο βήμα της ανατομής γίνεται χωρίς πρόβλημα γιατί $a_{11} \neq 0$.

Έστω, επαγωγικά, ότι $i-1$ βήματα της ανατομής $i < n$ γίνονται χωρίς πρόβλημα τότε θα έχουμε

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1i}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2i}^{(2)} \\ & & \dots & \vdots \\ & & & a_{ii}^{(i)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix}$$

$\delta_i \neq 0$

$\Rightarrow a_{11}^{(1)} \cdot a_{22}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{ii}^{(i)} = \delta_i \neq 0$

$$\Rightarrow a_{ii}''' \neq 0$$

Αρα και το βήμα i της αναδρομής γίνεται χωρίς πρόβλημα.

Λέμμα 3.11

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ με αυστηρά κυρίαρχα στοιχεία

δηλ

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i=1, \dots, n$$

↑
διαγώνιο
στοιχείο

α) A αντιστρέψιμος:

$$Ax = 0 \Rightarrow (Ax)_i = 0, \quad i=1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0, \quad i=1, \dots, n$$

$$\Rightarrow a_{ii} x_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j, \quad i=1, \dots, n$$

$$|a_{ii}| |x_i| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| |x_j|$$

Εστω $k \in \{1, \dots, n\}$ τ.ω. $\|x\|_{\infty} = |x_k|$

Τότε η προηγούμενη ανισότητα με $i=k$ δίνει:

$$|a_{kk}| \cdot |x_k| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| |x_j| \leq |x_k|$$

$$\Rightarrow |a_{kk}| |x_k| \leq \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \right) |x_k|$$

Για $x_k \neq 0$ παίρνουμε

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|$$

Απορία

Άρα $x=0$ και ο πίνακας
απογίρεσιμος

β) $A = LU$

Θεωρούμε τον πίνακα $A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix} \quad i=1, \dots, n$

Οι A_i έχουν αυστηρά κυριαρχική
διαγώνιο και σύμφωνα με το α
είναι απογίρεσιμοι, επομένως

$$\delta_i = \det A_i, \quad i=1, \dots, n-1$$

$$|\delta_i| > 0, \quad i=1, \dots, n$$

Ο πίνακας σύμφωνα με την προηγούμενη
απόδειξη αποδείχεται ότι απογίρεσιμος LU

25/4/17

\Rightarrow Normes πινάκων

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}$$

τ.ω. να ικανοποιούν:

$$(N_1), (N_2), \text{ κ } (N_3)$$

$$(N_4) \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n} \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Φυβικές Normes

Έστω $\|\cdot\|$ μια Norme στον \mathbb{R}^n

Η αντίστοιχη παραχόμενη Norme πινάκων: $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}$
ορίζεται ως εξής:

$$\|A\| := \sup_{\substack{(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Σημαντικά ιδιότητες!

$$\bullet \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

Ερώτημα! πως υπολογίζουμε μια φυβική Norme πινάκων; (Γενικά είναι ένα δύσκολο πρόβλ.)

Αν όμως $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|Ax\| \leq C_1 \|x\|$
με μια σταθερά C_1 τότε
 $\|A\| \leq C_1$

Αν $\exists y \in \mathbb{R}^n \quad y \neq 0$ τ.ω. $\|Ay\| \geq C_2 \|y\|$
με μια σταθερά C_2 , τότε $\|A\| \geq C_2$

Προσπαθούμε να αποδείξουμε τέτοιες αισιότητες με όσο μικρότερο C_1 γίνεται και με C_2 όσο μεγαλύτερο μπορούμε. Αν $C_1 = C_2$ τότε $\|A\| = C_1 (= C_2)$

Για τις νόρμες $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$, αυτό μπορεί να υπολογιστεί και οδηγεί στους τύπους

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \text{νόρμα αθρ. γραμμών}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad \text{νόρμα αθρ. στήλων}$$

$$\|A\|_2 = (\rho(A^T A))^{1/2}$$

\hookrightarrow Συμμετρικός πίνακας (πραγματικές ιδιοτιμές)

Εστω $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας πίνακας

Αν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ οι ιδιοτιμές του, τότε

το $\rho(B) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ λέγεται φασματική αυτίνα B

Δείκτης κατάστασης πίνακα

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντίστροφος

Θέλουμε να μελετήσουμε την κατάσταση του γραμμικού συστήματος

$$\underline{Ax=b}$$

Εστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον \mathbb{R}^n και n αντίστοιχη φασματική νόρμα πίνακα

\rightarrow μεταβολή

Ειδική περίπτωση: Εστω $\Delta b \in \mathbb{R}^n$

τότε η αντίστοιχη μεταβολή του Ax του x είναι T.W. $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$

Έχουμε

$$\cancel{Ax} + A \Delta x = \cancel{b} + \Delta b \Rightarrow$$

$$A \Delta x = \Delta b \Rightarrow$$

$$\Delta x = A^{-1} \Delta b \Rightarrow$$

$$\|\Delta x\| = \|A^{-1} \cdot \Delta b\| \Rightarrow$$

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|$$

υπόθεση

$b \neq 0$, οπότε $x \neq 0$

$$\text{Άρα } (*) \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|}{\|x\|}$$

$$\text{Όπως } Ax = b \Rightarrow \|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|,$$

$$\text{άρα } \|x\| = \frac{\|b\|}{\|A\|} \quad (**)$$

Από αυτές τις 2 σχέσεις προκύπτει

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|}{\frac{\|b\|}{\|A\|}}$$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Για ειδικά b και $\Delta b \neq 0$ αυτή η ανισότητα ισχύει ως ισότητα. Συμπεράσμα είναι ο συντελεστής ευαισθησίας του $Ax = b$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ του \mathbb{R}^n

Δείχνει κατάταξη του A :

$$\kappa(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$$\text{cond}(A)$$

• Ισχυρισμός

$$k(A) \geq 1$$

$$1 = \|\mathbb{I}_n\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{k(A)}$$

- Αν ο $k(A)$ είναι μικρός (όχι πολύ μεγαλύτερος του 1) τότε το σύστημα έχει καλή κατατάξη
- Αν ο $k(A)$ είναι πολύ μεγάλος, τότε το σύστημα $Ax=b$ έχει κακή κατατάξη.

Θεώρημα (επιπτώση της χρυσής μεταβολής διόδου > φαινομένων συστημάτων)

Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον \mathbb{R}^n και η αντίστοιχη φουβική νόρμα στον $\mathbb{R}^{n,n}$. Αν $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντίστροφος πίνακας, $\Delta A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b, \Delta b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$. Τότε αν $\kappa(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$, έχουμε:

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} Ax = b \\ A(x + \Delta x) = b + \Delta b \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)$$

$$\text{β) } \left. \begin{array}{l} Ax = b \\ (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{αντίστροφος} \\ \Rightarrow \end{array}$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

$\lambda)$ Αν $\|A^{-1}\| \cdot \|DA\| < 1$, τότε ο $A + DA$
 είναι αντιστρέψιμος και $Ax = b$

$$(A + DA)(x + \Delta x) = b + \Delta b \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{k(A)}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|DA\|} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|DA\|}{\|A\|} \right)$$

Απόδειξη

α) αποδεικνύει ιδι.

β) Πρώτα θα αποδείξουμε ότι ο $A + DA$ είναι αντιστρέψιμος και ότι

$$(*) \quad \|(A + DA)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|DA\|}$$

Έχουμε

$$A + DA = A(I_n + A^{-1}DA)$$

Θέτουμε $B = A^{-1}DA$. Θα αποδείξουμε ότι ο $I_n + B$ είναι αντιστρέψιμος. Έχουμε $\|B\| = \|A^{-1} \cdot DA\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|DA\| < 1$

Επομένως, σύμφωνα με την πρόταση 3.36, ο $I_n + B$ είναι αντιστρέψιμος και

$$\|(I_n + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$$

Επομένως, αφού $\|B\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|DA\| < 1$, έχουμε:



$$\| (I_n + B)^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|DA\|}$$

Συμπέρασμα: ο $A + \Delta A$ είναι αντιστρέψιμος ως γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων και

$$(A + \Delta A)^{-1} = (I_n + B)^{-1} \cdot A^{-1}$$

Επί πλέον $\| (A + \Delta A)^{-1} \| \leq \| (I_n + B)^{-1} \| \cdot \| A^{-1} \|$

$$\leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|DA\|} \|A^{-1}\|$$

↑

(+)

δηλαδή ισχύει η (*)

Τώρα $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b \Rightarrow$

$$(A + \Delta A)\Delta x = \cancel{b} - \cancel{Ax} - \Delta A \cdot x \Rightarrow$$

$$\Delta x = - (A + \Delta A)^{-1} \cdot \Delta A \cdot x \Rightarrow$$

$$\| \Delta x \| \leq \| (A + \Delta A)^{-1} \| \cdot \| \Delta A \| \cdot \| x \| \Rightarrow$$

$$\frac{\| \Delta x \|}{\| x \|} \leq \| (A + \Delta A)^{-1} \| \cdot \| \Delta A \| \Rightarrow (*)$$

$$\frac{\| \Delta x \|}{\| x \|} \leq \frac{\| A^{-1} \| \cdot \| A \|}{1 - \| A^{-1} \| \cdot \| \Delta A \|} \cdot \frac{\| \Delta A \|}{\| A \|} = \kappa(A)$$

*) Εξίσωση

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b \Rightarrow$$

$$(A + \Delta A) \Delta x = \cancel{b} + \Delta b - \cancel{Ax} - \Delta A \cdot x \Rightarrow$$

$$(A + \Delta A) \cdot \Delta x = \Delta b - \Delta A \cdot x \Rightarrow$$

$$\Delta x = (A + \Delta A)^{-1} \cdot (\Delta b - \Delta A \cdot x) \Rightarrow$$

$$\|\Delta x\| \leq \|(A + \Delta A)^{-1}\| \cdot (\|\Delta b\| + \|\Delta A\| \cdot \|x\|) \Rightarrow$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|(A + \Delta A)^{-1}\| \cdot \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|x\|} + \|\Delta A\| \right) \Rightarrow (*)$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|A\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|x\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)$$

Προβλεπω το A "με την βία"

$$\text{αλλά } b = Ax \Rightarrow$$

$$\|b\| \leq \|A\| \|x\|$$

οπότε η προηγ.

εξίσωση δίνει:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)$$

Παρατηρήσεις:

i) Οι α) & β) είναι ειδικές περιπτώσεις της γ)

ii) όλες οι Εξισώσεις είναι βέβαιες.

Επαναληπτικές μέθοδοι

$$Ax=b, \quad A \in \mathbb{R}^{n,n} \quad \text{αριθμητικός}$$

Με δοθείσα αρχική προσέγγιση $x^{(0)}$
οι επαναληπτικές μέθοδοι δίνουν μια
ακολουθία $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ προσεγγίσεων της x
Ειδικές επαναληπτικές μέθοδοι:

- Μέθοδος Jacobi
- " του Gauss-Seidel

Πως οδηγούμεστε σε αυτές;

$$Ax=b \Rightarrow (Ax)_i = b_i, \quad i=1, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad \forall i$$

$$\Rightarrow a_{ii} x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j$$

(Υπόθεση $a_{ii} \neq 0, \quad i=1, \dots, n$)

$$\Rightarrow x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right] \quad \forall i$$

Jacobi: $x^{(m)} \rightarrow x^{(m+1)}$

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(m)} \right]$$

Gauss-Seidel

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(m)} \right]$$

27/4/17

Επαναληπτικές Μεθόδους

$$Ax = b, A \in \mathbb{R}^{n,n}, b \in \mathbb{R}^n, \det A \neq 0$$

Μεθόδους του Jacobi και του Gauss-Seidel

Υπόθεση $a_{ii} \neq 0, i=1, \dots, n$
Τότε

$$Ax = b \Leftrightarrow x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right]$$

$$\text{Jacobi: } x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(m)} \right]$$

$$\text{Gauss-Seidel: } x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(m)} \right]$$

$i=1, \dots, n$

- Η μέθοδος του Jacobi μπορεί να υλοποιηθεί παράλληλα. Η μέθοδος του Gauss-Seidel δεν μπορεί να υλοποιηθεί παράλληλα.
- Υπάρχει μια κατηγορία γραμμικών συστημάτων για τα οποία η μέθοδος του Gauss-Seidel συγκλίνει πολύ πιο γρήγορα από τη μέθοδο του Jacobi. Συνικά όμως υπάρχουν συστήματα για τα οποία η μία μέθοδος συγκλίνει και η άλλη όχι.
- Οι μέθοδοι αυτοί είναι κατάλληλοι για αραιούς πίνακες

→ Η υλοποίηση γίνεται σε μορφή που δώσαμε για τη θεωρητική μελέτη θα τις γράφουμε σε κατάλληλότερη μορφή.

Opisoupe:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ a_{21} & 0 & & \\ a_{31} & a_{32} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Tote $A = L + D + U$

Jacobi: $a_{ii} x_i^{(m+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(m)}$

$$\Leftrightarrow D x^{(m+1)} = b - (L + U) x^{(m)}$$

Gauss-Seidel:

$$\sum_{j=1}^i a_{ij} x_j^{(m+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(m)}$$

$$\Leftrightarrow (L + D) x^{(m+1)} = b - U x^{(m)}$$

$$\Leftrightarrow x^{(m+1)} = -(L + D)^{-1} U x^{(m)} + (L + D)^{-1} b$$

◦ Γενική επαναληπτική μέθοδος ◦

$A = M - N$ με M αντιστρέψιμος.

$$Ax = b \Leftrightarrow (M - N)x = b \Leftrightarrow$$

$$Mx = Nx + b$$

$$Mx^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b$$

Ειδικές περιπτώσεις

Jacobi: $M_j = D$, $N_j = -(L+U)$.

Gauss-Seidel: $M_{GS} = L+D$, $N_{GS} = -U$

◦ Έστω ότι $x^{(m)} \rightarrow y$, $m \rightarrow \infty$

Tότε

$$Mx^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b$$

↓

My

↓

$Ny + b$

$$\Rightarrow My = Ny + b \Leftrightarrow$$

$$(M - N)y = b \Leftrightarrow$$

$$Ay = b \Leftrightarrow$$

$$y = x$$

Συμπέρασμα: Εάν μια επαναληπτική μέθοδος συγκλίνει, τότε το όριο συγκλίνει στο βασικό όριο, δηλ

$$x^{(m)} \longrightarrow x, \quad m \longrightarrow \infty$$

Ερώτηση: Πότε συγκλίνει μια επαναληπτική μέθοδος;

$$\left. \begin{aligned} Mx^{(m+1)} &= Nx^{(m)} + b \\ Mx &= Nx + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$M(x^{(m+1)} - x) = N(x^{(m)} - x) \Rightarrow$$

$$x^{(m+1)} - x = M^{-1}N(x^{(m)} - x)$$

Ο πίνακας $G := M^{-1}N$ λέγεται πίνακας επανάληψης μεθόδου.

Έχουμε: $x^{(m+1)} - x = G(x^{(m)} - x) \quad m=0,1,2,\dots$

Άρα, Επαγωγικά

$$x^{(m)} - x = G^m(x^{(0)} - x), \quad m \in \mathbb{N}_0$$

Άρα $\|x^{(m)} - x\| = \|G^m(x^{(0)} - x)\| \leq \|G^m\| \cdot \|x^{(0)} - x\|$

και ότι m αυξάνεται ισχύει ως ι βόρεια.
για κάποιο $x^{(0)}$

Συμπέρασμα

$$x^{(m)} \rightarrow x, \quad m \rightarrow \infty \quad \Leftrightarrow \quad G^m \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty$$

• Βασικό αποτέλεσμα •

Λήμμα (Σχέση φιδιμίας νόρμας και φιδιμίας αυτών πίνακα)

Εστω $\|\cdot\|$ μια οποιαδήποτε νόρμα στον \mathbb{C}^n . Τότε για κάθε $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ισχύει

$$(*) \quad \rho(P) \leq \|P\|$$

(με $\|\cdot\|$ τη αντίστοιχη φιδιμία νόρμα)

• $\left\{ \lambda_1(P), \dots, \lambda_n(P) \right\}$ ιδιοτιμές του P
• φιδιμίας αυτών: $\rho(P) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(P)|$

Αντίστοιχα, για κάθε $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και ετο υπάρχει φιδιμία νόρμα $\|\cdot\|$ τ.ω

$$\|P\| \leq \rho(P) + \varepsilon$$

Απόδειξη (μεσο της $(*)$)

Εστω $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του P και $z \in \mathbb{C}^n$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Τότε

$$Pz = \lambda z$$

$$\Rightarrow \underbrace{\|\lambda z\|}_{|\lambda| \cdot \|z\|} = \|Pz\| \leq \|P\| \|z\|$$

$$\Rightarrow |\lambda| \cdot \|z\| \leq \|P\| \cdot \|z\|$$

$$\Rightarrow |\lambda| \leq \|P\| \quad \text{Αφού από } \rho(P) \leq \|P\| \text{ και } (*)$$

Θεώρημα (Jucovics & αναγκαίες συνθήκες συζυγίσιμης επαναληπτικής μεθόδου)

Έστω x η λύση του $Ax=b$
 Τα παραπάνω είναι ισοδύναμα:

a) Η επαναληπτική μέθοδος

$$Mx^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b$$

($A = M - N$)

συζυγίσιμη, δηλαδή αρχική προσέγγιση
 $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$, έχουμε $x^{(m)} \rightarrow x$,
 $m \rightarrow \infty$

β) $\rho(G) < 1$, με $G = M^{-1}N$
 του πίνακα επανάληψης
 της μεθόδου

γ) Υπάρχει φυσική νόρμα
 πινάκων

III. III τ.ω. $\|G\| < 1$
 , προσοχή $\alpha > 1$ αν θεωρηθεί ότι
 απαραίτητα δεν συζυγίσιμη!

δ) $\lim_{m \rightarrow \infty} G^m = 0$

$$a \Rightarrow b \Leftrightarrow \neg a \Leftrightarrow \neg b$$

Απόδειξη

$$a) \quad a \Rightarrow b$$

Εβίω ότι $x^{(m)} \rightarrow x, m \rightarrow \infty$

Για οποιοδήποτε $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$
Τότε, από τω $Gx \in Gx$

$$x^{(m)} - x = G^m (x^{(0)} - x)$$

Επεται ότι $\bigoplus_{x^{(0)} \in \mathbb{C}^n} G^m (x^{(0)} - x) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$
για οποιοδήποτε $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$

Για δεδομένο $y \in \mathbb{C}^n$, επιλέγουμε

$$x^{(0)} = x + y \quad \text{και δίνει (από } \bigoplus)$$

$$G^m y \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$$

Εβίω η ιδιοτιμή του G^m
και z αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα

Τότε

$$Gz = \lambda z, \text{ οπότε, επαγωγικά}$$

$$G^m z = \lambda^m z$$

Οπως $G^m z \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$, οπότε

$$\lambda^m z \rightarrow 0, m \rightarrow \infty, \text{ οπότε}$$

$$\|\lambda^m z\| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$$

$$|\lambda|^m \|z\| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$$

$\neq 0$

$$\Rightarrow |\lambda|^m \rightarrow 0, m \rightarrow \infty \Rightarrow |\lambda| < 1$$

$$\text{Άρα } \rho(G) < 1$$

$$\beta) \Rightarrow \delta) : \rho(G) < 1 \Rightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $\phi \in G_m$
 τέτοια $\| \cdot \|$ T.W

$$\| G \| \leq \underbrace{\rho(G)} + \varepsilon < 1$$

Για $\varepsilon < 1 - \rho(G)$ παίρνουμε

$$\rho(G) + \varepsilon < 1, \text{ οπότε } \| G \| < 1$$

$\delta) \Rightarrow \sigma) : \text{Έστω } \| G \| < 1 \text{ τότε}$

$$\| G^m \| = \| G \cdot G \cdots G \| \leq \| G \| \cdot \| G \| \cdots \| G \|$$

$$= \| G \|^m \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$$

$$\text{επίσης } G^m \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$$

$\delta) \Rightarrow \alpha)$

$$x^{(m)} - x = G^m (x^{(0)} - x) \Rightarrow$$

$$\| x^{(m)} - x \| \leq \| G^m \| \cdot \| x^{(0)} - x \|$$

↓

$$0, m \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \| x^{(m)} - x \| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow x^{(m)} \rightarrow x, m \rightarrow \infty$$

πρόβλημα Στο "Υπάρχει" Στο λ

Παράδειγμα

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\|G\|_{\infty} = 2$$

$$\|G\|_1 = 2$$

$$\|G\|_2 = 2$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \rightarrow \rho(G) = 0$$

Ουγκλίσις και οι νόρμες
είναι > 1

Μαδρίστα νόρμες $G^2 = 0$

Βοηθητικό αποτέλεσμα επιτομισμού ιδιοτιμών
πίνακων

Λήμμα (Αντίστροφή του Gerschgorch)

Εάν $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και λ ιδιοτιμή
του A , τότε υπάρχει $s \in \{1, \dots, n\}$ τέτοιο

$$|\operatorname{Im} s - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n |a_{sj}|$$

Απόδειξη

ΕΓΤω $z \in \mathbb{C}^n$ αυθόρμητο ιδιοδιάνυσμα,
 $Az = \lambda z \Rightarrow$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j = \lambda z_i, \quad i=1, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow (a_{ii} - \lambda) z_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} z_j$$

$$\Rightarrow |a_{ii} - \lambda| \cdot |z_i| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \cdot |z_j|$$

ΕΓΤω $s \in \{1, \dots, n\}$ τ.ω

$$|z_s| = \|z\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq n} |z_j|$$

Τότε n προηγούμενη εκτιμήσεις
με $i=s$, δίνει $\leq |z_s|$

$$|a_{ss} - \lambda| \cdot |z_s| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n |a_{sj}| |z_j|$$

$$\Rightarrow |a_{ss} - \lambda| \cdot \cancel{|z_s|} \leq \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n |a_{sj}| \right) \cdot \cancel{|z_s|}$$

$$\Rightarrow |a_{ss} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n |a_{sj}|$$

28/4/17

Άσκηση 2.2.3

α) Ανισότητα του young

Αν $1 < p, q < \infty$ τ.ω $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

και $a, b \geq 0, \forall \delta > 0$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

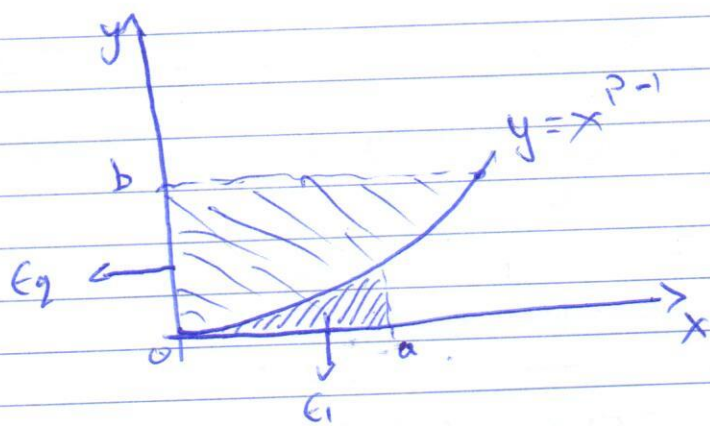
Ειδική περίπτωση $p=q$ ($q=q$)

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Ισοτητα 16xva pouo} \\ \text{για } b = a^{p-1} \end{array} \right)$$

$$2ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$2ab \leq a^2 + b^2 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$



$$E_1 = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{x^p}{p}$$

$$E_2 = \int_0^b y^{\frac{1}{p-1}} dy = \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{b^q}{q}$$

$$\frac{1}{p-1} = q-1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = (p-1)(q-2) \quad \Leftrightarrow$$

$$1 = pq - p - q + 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$p + q = pq \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \quad \checkmark$$

B) Ανισότητα του Hölder

Για $1 \leq p < \infty$ ορίζουμε

$$\|\cdot\|_p: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

για $x, y \in \mathbb{C}^n$ ισχύει

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

με p, q τ.ω. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

για $p=q=2$ ($q=2$) η ανισότητα είναι η ανισότητα του Cauchy-Schwarz

$p=1$ ($q=\infty$)

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right) \|y\|_\infty$$

Αν $x=0$ ή $y=0$ η ανισότητα είναι τετριμμένη

Ενδιαφερόμενα περιπτώσεις

$1 < p < \infty$, και $x \neq 0$ και $y \neq 0$

Ειδική περίπτωση: $\|x\|_p = 1$ και $\|y\|_q = 1$

$$|x_i y_i| \leq \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q} \quad (\text{Young})$$



$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |x_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |y_i|^q$$

$$\|x\|_p^p \quad \|y\|_q^q$$

$$= \frac{1}{p} 1 + \frac{1}{q} 1 = 1$$

Αρα $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$

Σεικίη περίπτωση: $\tilde{x} = \frac{1}{\|x\|_p} \cdot x$

$$\tilde{y} = \frac{1}{\|y\|_q} y$$

Τότε $\|\tilde{x}\|_p = \|\tilde{y}\|_q = 1$, οπότε, σύμφωνα

με την προηγούμενη περίπτωση

$$\sum_{i=1}^n |\tilde{x}_i \tilde{y}_i| \leq 1 \quad \text{Αρα}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \leq 1, \quad \text{οπότε} \quad \frac{1}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \cdot \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq 1$$

$$\text{δλδ} \quad \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

f) για $1 \leq p < \infty$ η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα

αί $(N_1), (N_2)$ είναι τετραπλάσια

Η (N_3) λέγεται αλγόριθμος του Minkowski:

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n \quad \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

• $p=1$ Τετραπλάσια

$$|x_i| + |y_i|$$

• $1 < p < \infty$

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i+y_i|}_{\leq} |x_i+y_i|^{p-1}$$

$$\|x+y\|_p^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| \cdot |x_i+y_i|^{p-1}$$

$$\leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{i=1}^n (|x_i+y_i|^{p-1})^{\frac{1}{q}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

↑
Hölder

$$= (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{(p-1)/q} \right)^{1/q}$$

$$= (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p \right)^{1/p} \right)^{p-1}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$$

$$\Rightarrow \|x+y\|_p = (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot \|x+y\|_p^{p-1}$$

$$\Rightarrow \|x+y\|_p = \|x\|_p + \|y\|_p$$

2 / 5 / 2017

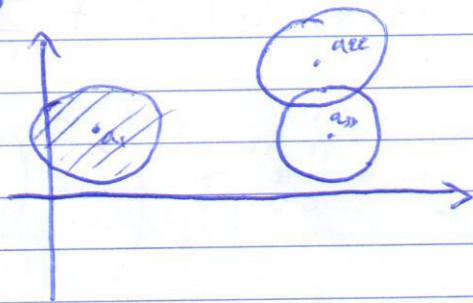
Έστω $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{C}^{n,n}$

και λ ιδιοτιμή του τότε,
υπάρχει $s \in \{1, \dots, n\}$ τ.ω.

$$|a_{ss} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n |a_{sj}|$$

Συμπέρασμα. Γιαθε ιδιοτιμή ενός πίνακα A
αυκεί $s \in \{1, \dots, n\}$ είναι κέντρο $\mathcal{K}_s(a_{ss}, r_s)$ με
με κέντρο a_{ss} και ακτίνα $r_s = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n |a_{sj}|$

Με άλλα λόγια, όλες οι ιδιοτιμές του A
περιέχονται σε $\bigcup_{s=1}^n \mathcal{K}_s(a_{ss}, r_s)$.
Οι κέντρα αυτοί λέγονται κέντρα του
Gerschgorin



Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι αντιστρέψιμος \Leftrightarrow
και μόνο αν το μηδέν δεν είναι
ιδιοτιμή του.

Πραγματικά: A αντιστρέψιμος \Leftrightarrow

$$(Ax=0 \Rightarrow x=0)$$

$$\Leftrightarrow (Ax=0 \cdot x \Rightarrow x=0)$$

$A \in \mathbb{C}^{n,n}$ με αυστηρά κυριαρχική διαγώνια

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i=1, \dots, n$$

Πόρισμα: 0 A είναι ανιγτρέφσιμος

Έστω ότι ο A δεν είναι ανιγτρέφσιμος.
Τότε το $\lambda=0$ είναι η ιδιοτιμή του,
οπότε, σύμφωνα με το αβέστη του
Gerschgorin υπάρχει $s \in \{1, \dots, n\}$ τ.ω

$$|a_{ss} - 0| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n |a_{sj}| \Leftrightarrow$$

$$|a_{ss}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n |a_{sj}| \quad (\text{ατονο})$$

Θεώρημα

Σύμφωνα τ.ω με μέθοδο του Jacobi,
του Gauss-Seidel για περίπτωση πίνακα
συμμετρικών με αυστηρά κυριαρχική διαγώνια

Έστω ότι ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ έχει αυστηρά
κυριαρχική διαγώνια. Τότε:

- a) Οι πίνακες επανάληψης $G_J = -D^{-1}(L+U)$
και $G_{GS} = -(L+D)^{-1}U$ τ.ω με μέθοδο του
Jacobi και τ.ω Gauss-Seidel αντίστοιχα
ικανοποιούν τις αβέστης

$$\|G_J\|_{\infty} < 1 \quad ; \quad \|G_{GS}\|_{\infty} < 1$$

β) Οι μέθοδοι του Jacobi και του Gauss-Seidel συγκρίνονται.

Απόδειξη Σύμφωνα με τα προηγουμένα ο A είναι αλγεβρικός. Επίσης τα διαγώνια στοιχεία του A είναι διαφορετικά του μηδένος, οπότε οι μέθοδοι μπορούν να εφαρμοστούν

α) θέτουμε

$$G = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$$

προφανώς $G < 1$

Jacobi. Ισορροπός $\|G_J\|_\infty = G$

Τώρα

$$\|G_J\|_\infty = \|D^{-1}(L+U)\|_\infty$$

$$D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & & & \\ & \frac{1}{a_{22}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n-1}}{a_{nn}} & & \dots & \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix}$$

Ringkasan

$$D \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n,n}$$

$$(DB)_{ij} = \sum_{z=1}^n D_{iz} \cdot B_{zj} = D_{ii} B_{ij}$$

$$(BD)_{ij} = \sum_{z=1}^n B_{iz} \cdot D_{zj} = B_{ij} \cdot D_{jj}$$

$\uparrow_{z=j}$

$$\text{Apa } \|G_j\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|$$

$$= \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right)$$

$$= G$$

Ισχυρισμός

Για την μέθοδο Gauss-Seidel

$$\|G_{GS}\|_{\infty} \leq G$$

για να αναφέρουμε τον υπολογισμό του $(L+D)^{-1}$ θα χρησιμοποιήσουμε ένα έμμεσο τρόπο: για $y \in \mathbb{C}^n$ θέτουμε $u := G_{GS} y$.

Θα αποδείξουμε ότι $\|u\|_{\infty} \leq G \|y\|_{\infty}$,

δηλ.

$$\forall y \in \mathbb{C}^n \quad \|G_{GS} y\|_{\infty} \leq G \|y\|_{\infty},$$

οπότε

$$\|G_{GS}\| \leq G$$

Ισχυρισμός: $\forall i = 1, \dots, n$ ισχύει

$$(*) \quad |u_i| \leq G \|y\|_{\infty}$$

Θα αποδείξουμε επαγωγικά την $(*)$

$$\text{Έχουμε } u = G_{GS} y \Leftrightarrow u = -(L+D)^{-1} Ly$$

$$(L+D)u = -Ly \Leftrightarrow \sum_{j=1}^i a_{ij} u_j = - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} y_j$$

$$(*) \Leftrightarrow a_{ii} u_i = - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} y_j$$

$$\Leftrightarrow u_i = - \frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} y_j \right]$$

$i = 1, \dots, n$

για $i=1$ έχουμε:

$$u_i = - \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left[\sum_{j=2}^n a_{ij} y_j \right] \Rightarrow$$

$$|u_i| \leq \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j=2}^n |a_{ij}| |y_j| \leq \|y\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow |u_i| \leq \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j=2}^n |a_{ij}| \right) \|y\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow |u_i| \leq C \|y\|_{\infty}$$

825 n (*) (6x06) για $i=1$

Βήμα της επαγωγής: έστω ότι n (*) (6x6) για $1, 2, \dots, i-1$

Θ.Σ.Ο ισχύει και για i .

Πράγματι, από τη (*) παίρνουμε

$$|u_i| \leq \frac{1}{|a_{ii}|} \left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| |u_j| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| |y_j| \right) \leq C \|y\|_{\infty} \leq \|y\|_{\infty}$$

↑
υπόθεση επαγωγής

$$\Rightarrow |u_i| \leq \frac{1}{|a_{ii}|} \left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \right) \|y\|$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

Εροπένως

$$\|u\| = \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right) \|y\|_{\infty}$$

$$\leq C$$

B) Το B είναι άνω το J είναι θετικά σύζυγος επωαυτημίν μεθόδω.

Άσκηση 3.23

δ) Ανόματα του Jensen

Για $1 \leq p < q < \infty$ και $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p$$

(Για $x = (1, 0, \dots, 0)$ η ανόματα $\|x\|_q$ ως $\|x\|_p$)

πράτως $|x_i| \leq \|x\|_p \quad i=1, \dots, n$

$$\left(|x_i|^p \leq \sum_{j=1}^n |x_j|^p \Rightarrow |x_i|^p \leq \|x\|_p^p \right)$$

(ιδιαίτερα, $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \|x\|_p$
" $\|x\|_{\infty}$.)

Σημείωση α) $\int_{\mathbb{R}^n} |x_i|^{q-1} dx$ για $q < \infty$

ΕΓΓΩ $q < \infty$. Τότε

$$|x_i|^q = |x_i|^p \cdot |x_i|^{q-p} \Rightarrow$$

$$|x_i|^q \leq |x_i|^p \cdot \|x\|_p^{q-p} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^q \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right) \|x\|_p^{q-p}$$

$\|x\|_q^q \leq \|x\|_p^q \|x\|_p^{q-p}$

$$\Rightarrow \|x\|_q \leq \|x\|_p$$

$$\Rightarrow \|x\|_q \leq \|x\|_p$$

Άσκηση 3.94

$\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ του \mathbb{R}^n

Βεβαιώστε σταθερές σύγκρισης,

Συμπερασμα με την ανισότητα του Jensen έχουμε:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$$

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

και η σταθερές (n μονάδα) είναι βέλτιστες.

Ισοχυρισμός:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$$

Πράγματι $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$

$$\leq \|x\|_\infty + \dots + \|x\|_\infty$$
$$= n \|x\|_\infty$$

Για $x = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ n αγκύρια
16xία ως 160τητα.

Ισοχυρισμός: $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$

Πράγματι $\|x\|_2^2 = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2$

$$\leq \|x\|^2 + \dots + \|x\|_\infty^2 = n \|x\|_\infty^2$$

$$\Rightarrow \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

(Για $x = (1, \dots, 1)^T$ 16xία ως 160τητα)

Ισοχυρισμός:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n 1 \cdot |x_i|$$
$$\leq \left(\sum_{i=1}^n 1^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

GS \nearrow

$\forall x \in \mathbb{R}^n$
 $\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$

για $x = (1, 1, \dots, 1)^T$ έχουμε

$$\|x\|_1 = n$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{n}$$

$$\|x\|_1 = \sqrt{n} \cdot \|x\|_2$$

Άσκηση 3.31

Υπάρχει φεβλις νόρμα 2×2 πίνακων τ.ω.
για τον πίνακα A που είναι

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{να ισχύει}$$

$$\|A\| = 2.5 ;$$

Λύση:

A η νόρμα είναι φεβλις και είναι \leq φεβρατική
αυτίνας τότε άτοπο

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)^2 - 4,$$

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda+1 = \pm 2$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$$

φάση αντίφαση:

$$\rho(A) = \max(|-3|, |2|) = 3$$

$$\begin{array}{ccc} \|A\| < \rho(A) \\ \| & \| \\ 2.5 & 3 \end{array}$$

Άρα δεν υπάρχει τέτοια φυβική νόρμα.

Άσκηση 3.32

a) $\|A\|_{\max} = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

Είναι αυτές φυβικές νόρμες;

Με τον πίνακα της προηγούμενης άσκησης

$$\|A\|_{\max} < \rho(A)$$

$$\begin{array}{ccc} \| & \| \\ 2 & 3 \end{array}$$

Άρα $\|A\|_{\max}$ δεν είναι φυβική νόρμα

$$\|I_n\|_E = \sqrt{n} > 1 \text{ για } n > 1$$

ενώ για φυβικές νόρμες έχουμε

$$\|I_n\| = 1$$

πραγματούς,

$$\|J_n\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|J_n x\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$$

β) $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|Ax\|_2 \leq \|A\|_e \|x\|_2$
(δηλαδή $\|A\|_2 \leq \|A\|_e$)

Εξάγετε $\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |(Ax)_i|^2 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|^2$

$$\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \cdot \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)$$

Εξ \rightarrow

$$= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \cdot \|x\|_2^2$$

$$= \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right) \cdot \|x\|_2^2$$

$$\|A\|_e^2$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_2 \leq \|A\|_e \cdot \|x\|_2 = \Delta$$

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_e \|x\|_2$$

4/5/17

Άσκηση 3.36 (Θεώρημα 3.3)

$\|\cdot\|$ νόρμα στον \mathbb{R}^n και n αριθμούς
φυσικά νόρμα στον $\mathbb{R}^{n,m}$.

Αν $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ τ.ω. $\|A\| < 1$

υπό 0 $I_n - A$ αντιστρέψιμος.

$$(I_n - A)x = 0 \Leftrightarrow x - Ax = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = Ax \Rightarrow \|x\| = \|Ax\| \Rightarrow$$

$$\|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

Αν $x \neq 0$, τότε $1 \leq \|A\|$
Ατοπο.

$$\underline{\underline{\text{υπό}}}$$
 $\frac{1}{1 + \|A\|} \leq \|(I_n - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$

$$I_n = (I_n - A)^{-1} (I_n - A) \Rightarrow$$

$$\|I_n\| = \|(I_n - A)^{-1} \cdot (I_n - A)\|$$

"

$$1 \leq \|(I_n - A)^{-1}\| \cdot \underbrace{\|I_n - A\|}_{\leq \|I_n\| + \|A\|}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \|(I_n - A)^{-1}\| (1 + \|A\|)$$

$$\begin{aligned}
1 &= \| (I_n - A)^{-1} (I_n - A) \| \\
&= \| (I_n - A)^{-1} - (I_n - A)^{-1} A \| \\
&\geq \| (I_n - A)^{-1} \| - \| (I_n - A)^{-1} \cdot A \| \\
&\leq \| (I_n - A)^{-1} \| \cdot \| A \| \\
&\geq \| (I_n - A)^{-1} \| - \| (I_n - A)^{-1} \| \cdot \| A \| \\
\Rightarrow 1 &\geq \| (I_n - A)^{-1} \| \cdot \underbrace{(1 - \| A \|)}_{> 0}
\end{aligned}$$

Abungn 3.64

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -\frac{7}{2} \\ 1 & 1 & \frac{7}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vdo

- H metodas Jacobi Gufndiver
- H metodas Gauss-Seidel JGuna anndiver

Jacobi:

$$G_J = - \underbrace{D^{-1}}_{I_3} (L + U) = - (L + U)$$

Άρα

$$G_J = - \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 2 & 0 & \frac{7}{4} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Normes $\rho(G_J) > 1$

οπότε θα βρούμε τω φασματική αυτίνα

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$P(\lambda) = \det(G_J - \lambda I_3)$$

καύνας του Sarrus:

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{11}	a_{12}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{21}	a_{22}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{31}	a_{32}

(Note: In the original image, red lines connect the first three columns to the last two columns in a cyclic pattern: $a_{11} \rightarrow a_{22} \rightarrow a_{33} \rightarrow a_{12} \rightarrow a_{23} \rightarrow a_{31}$. There are also red minus signs under a_{31} , a_{32} , and a_{33} .)

$$\det A = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12}$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - \frac{1}{4})$$

Ιδιοτιμές:

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_{2,3} = \pm \frac{1}{2}$$

φασματική αυτίνα: $\rho(G_J) = \frac{1}{2} < 1$

πράγματι βεβαιώνει.

Abgaben 3.05

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

VfO

Gauss-Seidel konvergent
Jacobi konvergent

Gauss-Seidel:

Iterationen: $G_{GS} = -(L+D)^{-1}U = - \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ISOTIPES: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1}{3}$

$$\rho(G_{GS}) = \frac{1}{2} < 1 \rightarrow \text{konvergent}$$

Jacobi:

n.v. Enwēt.

$$G_J = -D^{-1}(L+U) = -(L+U)$$

$$= - \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$$P(\lambda) = \det(G_J - \lambda I_3)$$

$$= - \lambda^3 + \frac{11}{6}\lambda - \frac{7}{6}$$

Τώρα $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} P(\lambda) = +\infty$

$$P(-1) = +1 - \frac{11}{6} - \frac{7}{6}$$

$$= -2 < 0$$

Συμπεράσματα.

Υπάρχει ρίζα του p στο διαστ.
 $(-\infty, -1)$

Άρα η φάβρατιμ αυτίνα

$\rho(G_J) > 2$ και ετι
έχει γενικά
απόκλιση.