1/4/2014

3 Γραμμικά συστήματα

Δεδομένα: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ $n \times n$ πίνακας
$b \in \mathbb{R}^{n}$ διάνυσμα με n συνιστώσες

Ζητούμενο: $x \in \mathbb{R}^{n}$ τω. $Ax = b$

Τέτοια γραμμικά συστήματα προκύπτουν πολύ συχνά στις εφαρμογές, συνήθως ως μέρος συνθετότερων προβλημάτων

Θα μας απασχολήσουν τα θέματα:

α) Αριθμητικές μέθοδοι για την προσέγγιση του x

- **Κόστος** (απαιτούμενες πράξεις και απαιτ. μνήμη)
- **Ευστάθεια** των μεθόδων

β) Κατάσταση γραμμικών συστημάτων

Υπάρχουν δύο μεγάλες κατηγορίες αριθμητικών μεθόδων:

α) **Άμεσες** (παραλλαγές της μεθόδου απαλοιφής του Gauss)

Όταν οι πράξεις γίνονται ακριβώς, αυτές οι μέθοδοι δίνουν τη λύση ακριβώς με πεπερασμένο πλήθος πράξεων.

β) Επαναληπτικές μέθοδοι

Δίνουν μία ακολουθία προσεγγίσεων $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots$ του x.

Γενικά για γραμμικά συστήματα

Δεδομένα: Συντελεστές $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$,
Δεύτερα μέλη: $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$

Ζητούμενα: $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \quad (*)$$

Με τον πίνακα

$$A := (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

και $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

το (*) γράφεται στη μορφή $Ax = b$

Θα ασχοληθούμε με γραμμικά συστήματα που έχουν <u>ακριβώς μία</u> λύση

Ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να έχει το $Ax=b$ ακριβώς μία λύση:

α) A αντιστρέψιμος, δηλ. υπάρχει ο A^{-1}

β) $\det A \neq 0$

γ) $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

δ) Οι στήλες (ή οι γραμμές) του A είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα

<u>Τρόποι επίλυσης</u>, γνωστοί από την Γραμμική Άλγεβρα:

α) <u>Κανόνας του Cramer:</u>

$A = (a^1\ a^2 \ldots a^n)$

$a^i = i$-οστή στήλη του A

$A_i = (a^1\ a^2 \ldots a^{i-1}\ b\ a^{i+1} \ldots a^n)$

Τότε

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, \ldots, n$$

β) Με τον A^{-1}: Υπολογίζουμε τον A^{-1} και έχουμε $x=A^{-1}b$

Αυτοί οι δύο τρόποι έχουν <u>μόνο θεωρητική</u> σημασία, <u>όχι πρακτική</u>

α) Cramer: Αναπτύσσοντας ως προς τη στήλη j έχουμε:

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\,a_{ij}\,\det A_{ij}$$

με $A_{ij}\in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$ ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε τη γραμμή i και τη στήλη j

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Κανόνας του Sarrus

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο γράφουμε την $\det A$ ως άθροισμα $n!$ όρων με n παράγοντες ο καθένας

Για τον υπολογισμό της $\det A$ χρειάζονται τότε $n!(n-1)$ πολλαπλ.

Απαιτούνται $n+1$ ορίζουσες

Συνολικά: $\underbrace{(n+1)!}_{\text{αυξάνει πολύ γρήγορα με το } n}(n-1)$ πολλαπλασιασμοί

(Υπάρχουν άλλοι τρόποι υπολογισμού οριζουσών με πολύ λιγότερες πράξεις)

3/4/14

$\boxed{Ax=b}$

$\det A \neq 0$

Τρόποι επίλυσης, γνωστοί από τη Γραμμική Άλγεβρα.

α) Κανόνας του Cramer

β) $\boxed{x = A^{-1} b}$

Σπάνια χρειάζεται στην πράξη να υπολογίσουμε τον A^{-1}. Αν αυτό απαιτείται, τότε μπορεί να γίνει ως εξής:

Θεωρούμε την <u>κανονική βάση</u> $e^1, e^2, \dots, e^n$ του $\mathbb{R}^n$, δηλ.

$$e^i_j = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{για } j = i \\ 0 & \text{"} \quad j \neq i \end{cases}$$

(δέλτα του Kronecker
σύμβολο του Kronecker)

Έστω u^i, $i = 1, \dots, n$, τ.ω.

$$Au^i = e^i, \quad i = 1, \dots, n$$

<u>Ισχυρισμός</u>: $A^{-1} = (u^1, u^2, \dots, u^n)$

Πράγματι, έχουμε

$A(u^1, u^2, \dots u^n) = (Au^1, Au^2, \dots, Au^n)$

$= (e^1, e^2, \dots, e^n) = I_n$

Ο υπολογισμός του A^{-1} απαιτεί την επίλυση n γραμμικών συστημάτων με πίνακα συντελεστών τον A. Άρα αυτός ο τρόπος είναι ασύμφορος!

Επί πλέον κόστος: $A^{-1}b$

Δύο μεγάλες κατηγορίες γραμμικών συστημάτων (πινάκων)

α) Πυκνοί πίνακες (αποθηκεύσιμοι πίνακες) Έχουν στοιχεία a_{ij} γενικά διάφορα του μηδενός

β) Αραιοί (ή σποραδικοί) πίνακες Έχουν πολλά μηδενικά στοιχεία, που αν τα εκμεταλλευτούμε έχουμε υπολογιστικά οφέλη

Μέγεθος πινάκων: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

$n < 100$ μικροί
$100 \leq n < 1000$ μεσαίοι (μετρίου μεγέθους)
$n \geq 1000$ μεγάλοι

Στην πράξη λύνουμε συστήματα με πυκνούς πίνακες μέχρι και μετρίου μεγέθους, ενώ με αραιούς πίνακες μέχρι και μεγάλου μεγέθους

Δύο μεγάλες κατηγορίες αριθμητικών μεθόδων
α) άμεσες: χρησιμοποιούνται κυρίως για πυκνούς πίνακες
β) επαναληπτικές: χρησιμοποιούνται κυρίως για αραιούς πίνακες

Οι άμεσες μέθοδοι είναι παραλλαγές της μεθόδου απαλοιφής του Gauss. Δίνουν τη λύση ακριβώς με πεπερασμένο πλήθος πράξεων, στην περίπτωση που οι πράξεις γίνονται ακριβώς.
Οι επαναληπτικές μέθοδοι δίνουν μία ακολουθία προσεγγίσεων της λύσης.

Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Έστω $U=(u_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ ένας αντιστρέψιμος άνω τριγωνικός πίνακας, δηλ. τ.ω. $u_{ij}=0$ για $i>j$.

Ισχύει: $\det U = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}$

Άρα: U αντιστρέψιμος $\iff$ $u_{ii}\neq 0,\ i=1,\dots,n$

$\det\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=-1$

Έστω $y\in\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα
$Ux=y$
δηλ.

$$\left.\begin{aligned}
u_{11}x_1+u_{12}x_2+\dots+u_{1n}x_n&=y_1\\
u_{22}x_2+\dots+u_{2n}x_n&=y_2\\
&\ \ddots\\
u_{nn}x_n&=y_n
\end{aligned}\right\}$$

Τέτοια συστήματα λύνονται με οπισθοδρόμηση: Λύνουμε την τελευταία εξίσωση ως προς x_n, αντικαθιστούμε το x_n στην προηγούμενη και βρίσκουμε το x_{n-1} κλπ

Αλγόριθμος της οπισθοδρόμησης:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{y_n}{u_{nn}} \\ \text{για } k = n-1, n-2, \ldots, 1 \\ x_k = \dfrac{1}{u_{kk}} \left[y_k - \sum\limits_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j \right] \end{cases}$$

έχουν ήδη υπολογιστεί

$$\sum_{j=\cancel{1}\,k}^{n} u_{kj} x_j = y_k \implies$$

γνωστά

$$u_{kk} x_k = y_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j$$

Ιδέα στη μέθοδο απαλοιφής του Gauss:
Με μετασχηματισμούς γραμμών (δηλαδή είτε εναλλαγή δύο γραμμών είτε πολλαπλασιασμός μίας μίας γραμμής με έναν αριθμό, πρόσθεση σε μία άλλη γραμμή και αντικατάσταση της τελευταίας με αυτό που προκύπτει) γράφουμε ένα σύστημα $Ax=b$ στη μορφή $Ux=y$ με U άνω τριγωνικό. Αυτή η διαδικασία λέγεται τριγωνοποίηση.

Δύο στάδια:
τριγωνοποίηση:

$$Ax=b \rightsquigarrow Ux=y$$

Οπισθοδρόμηση:

$$Ux=y \rightsquigarrow x$$

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{y_n}{u_{nn}} \\ x_k = \dfrac{1}{u_{kk}} \left[y_k - \displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j \right], \quad k = n-1, \dots, 1 \end{cases}$$

Απαιτούμενες πράξεις

Διαιρέσεις: n

Πολλαπλασιασμοί και προσθέσεις:

$$1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

Απαιτούμενη μνήμη:

$\frac{n^2}{2} + O(n)$ θέσεις για τα u_{ij} και y_i

Τα x_i αποθηκεύονται στις θέσεις των y_i

Γενική περιγραφή:

$Ax = b$

Θέτουμε $A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)}) = A$

$b^{(1)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix} = b$ και γράφουμε το $Ax = b$ στη

μορφή $\boxed{A^{(1)} x = b^{(1)}}$

Τριγωνοποίηση:

1º Βήμα: Υπόθεση $a_{11}^{(1)} \neq 0$

(μπορεί πάντα να επιτευχθεί με εναλλαγές γραμμών)

Πολλαπλασιαστές:

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad i = 2, \dots, n$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί m_{i1}, αφαιρούμε το αποτέλεσμα από την i-στή γραμμή, και αντικαθιστούμε την i-στη γραμμή με το αποτέλεσμα, για $i = 2, \dots, n$

Έτσι, ύστερα από το πρώτο βήμα παίρνουμε το σύστημα

$A^{(2)} x = b^{(2)}$

με

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$b^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

με:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}^{(1)}, \quad i,j = 2,\dots,n$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1} b_1^{(1)}, \quad i = 2,\dots,n$$

<u>Βήμα r:</u> $1 \le r \le n-1$

Ξεκινάμε από το σύστημα $A^{(r)}x = b^{(r)}$,

$$A^{(r)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & & & & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & & & & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & a_{r-1,r-1}^{(r-1)} & \cdots & & a_{r-1,n}^{(r-1)} \\ \hline & & & 0 & a_{rr}^{(r)} & \cdots & a_{rn}^{(r)} \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & 0 & a_{nr}^{(r)} & \cdots & a_{nn}^{(r)} \end{pmatrix},$$

$$b^{(r)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_{r-1}^{(r-1)} \\ \hline b_r^{(r)} \\ \vdots \\ b_n^{(r)} \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε τον πίνακα $\tilde{A}^{(r)} = \left(a_{ij}^{(r)}\right)_{i,j=r,\dots,n}$

<u>Ισχυρισμός:</u> $\tilde{A}^{(r)}$ αντιστρέψιμος

• $\underbrace{\det A^{(r)}}_{\neq 0} = a_{11}^{(1)} \cdot a_{22}^{(2)} \cdots a_{r-1,r-1}^{(r-1)} \cdot \det \tilde{A}^{(r)}$

$$\left(\det A^{(r)} \overset{\text{είτε}}{=} \det A \atop \underset{\text{είτε}}{=} -\det A \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\det \tilde{A}^{(r)} \neq 0}$$

<u>Υπόθεση:</u> $a_{rr}^{(r)} \neq 0$

(μπορεί να επιτευχθεί με εναλλαγές γραμμών, αφού $\det \tilde{A}^{(r)} \neq 0$)

Πολλαπλασιαστές:

$$m_{ir} = \frac{a_{ir}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}}, \quad i = r+1, \dots, n$$

Πολλαπλασιάζουμε την r-στή εξίσωση επί m_{ir}, αφαιρούμε από την i-στή, και αντικαθιστούμε την i-στή με το αποτέλεσμα, για $i = r+1, \dots, n$. Παίρνουμε το σύστημα $A^{(r+1)}x = b^{(r+1)}$ με τις πρώτες r γραμμές του $A^{(r+1)}$ και τις πρώτες r συνιστώσες του $b^{(r+1)}$ ίδιες με τις αντίστοιχες των $A^{(r)}$ και $b^{(r)}$, αντίστοιχα, και

$$a_{ij}^{(r+1)} = a_{ij}^{(r)} - m_{ir} a_{rj}^{(r)}, \quad i,j = r+1, \dots, n,$$

$$b_i^{(r+1)} = b_i^{(r)} - m_{ir} b_r^{(r)}, \quad i,j = r+1, \dots, n,$$

και

$$a_{ij}^{(r+1)} = 0 \quad \text{για} \quad i = r+1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, r$$

Ύστερα από $n-1$ βήματα παίρνουμε το σύστημα

$$(*) \quad A^{(n)} x = b^{(n)}$$

με $A^{(n)}$ άνω τριγωνικό, με μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία (αφού όπως και ο A είναι αντιστρέψιμος)

Εδώ τελειώνει η τριγωνοποίηση

Οπισθοδρόμηση: λύνουμε το $(*)$

4/4/14

Μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Τριγωνοποίηση

Βήμα r

Πολλαπλασιαστές:

$$m_{ir} := \frac{a_{ir}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}}, \quad i = r+1, \dots, n$$

$$a_{ij}^{(r+1)} := a_{ij}^{(r)} - m_{ir} a_{rj}^{(r)}, \quad i,j = r+1, \dots, n$$

$$b_i^{(r+1)} := b_i^{(r)} - m_{ir} b_r^{(r)}, \quad i = r+1, \dots, n$$

Απαιτούμενες πράξεις και μνήμη

Οι προσθαφαιρέσεις είναι περίπου όσοι οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις. Έχει επικρατήσει να μετράμε μόνο τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις

Τριγωνοποίηση:

Βήμα r:

Πολλαπλασιαστές: $n-r$ διαιρέσεις
Για τα στοιχεία του A: $(n-r)^2$ πολλαπλασιασμοί
Για το b: $n-r$ πράξεις

Συνολικά για τα n-1 βήματα

Για τον A:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left[(n-i)^2 + (n-i) \right] = \frac{n^3-n}{3} \text{ πράξεις}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \right)$$

Για το b:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = 1+2+\dots+(n-1) = \frac{n^2-n}{2}$$

Για την οπισθοδρόμηση απαιτούνται: $\frac{n^2+n}{2}$ πράξεις

Συνολικό κόστος: $\frac{n^3+3n^2-n}{3} = \frac{n^3}{3} + O(n^2)$

Παράδειγμα: $n=20$

Υπόθεση: Ο υπολογιστής κάνει 10^6 πράξεις ανά δευτερόλεπτο

Gauss: $\frac{16}{3}\, 10^{-3}$ sec

Cramer: $21 \cdot 20! \, 19$ πολλαπλασιασμοί

↑ ορίζουσες

Χρόνος: $\simeq 3 \cdot 10^5$ αιώνες

Απαιτούμενη μνήμη

Για τον A: n^2 θέσεις μνήμης
Για τον b: n " "

Δεν απαιτείται επί πλέον μνήμη
Οι πολλαπλασιαστές m_{ir}, $i = r+1, \dots, n$, αποθηκεύονται στις θέσεις των στοιχείων a_{ir}, $i = r+1, \dots,$ n δηλαδή αποθηκεύονται στις θέσεις (i,j) με $i > j$ του πίνακα

Τα νέα στοιχεία του A υπολογίζονται από τους τύπους:

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} - m_{ir} a_{rj}, \quad i,j = r+1, \dots, n$$

(Τα m_{ir} παίρνουν τα ονόματα των αντίστοιχων a_{ir})

Οι νέες συνιστώσες των b αποθηκεύονται στις θέσεις των παλιών

Στην οπισθοδρόμηση η λύση X αποθηκεύεται στις θέσεις του b

Παρατήρηση (υπολογισμός ορίζουσας με λιγότερες πράξεις)

$$\det A = (-1)^m \det A^{(n)} = (-1)^m a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \dots a_{nn}^{(n)}$$

με m = πλήθος των εναλλαγών γραμμών κατά την τριγωνοποίηση.

<u>Απαιτούμενες πράξεις:</u> $\frac{n^3}{3} + O(n)$

<u>Κανόνας του Cramer:</u>

$$(n+1)\left(\frac{n^3}{3} + O(n)\right) = \frac{n^4}{3} + O(n^3)$$

ασύμφορος τρόπος

<u>Οδήγηση</u>

Τα διαγώνια στοιχεία $\alpha_{ii}^{(i)}$ λέγονται <u>οδηγοί</u>. Οι οδηγοί εμφανίζονται ως παρονομαστές τόσο στον υπολογισμό των πολλαπλασιαστών όσο και κατά την οπισθοδρόμηση. Αναμένονται προβλήματα στην περίπτωση που κάποιος οδηγός έχει μικρή απόλυτη τιμή.

<u>Παράδειγμα:</u>

$$\left.\begin{array}{l} 10^{-4} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 = 1.0001\ldots \\ x_2 = 0.9998\ldots \end{array}$$

$\beta = 10$, $\boxed{t=3}$, $L = -20$, $U = 20$, στρογγύλευση

$$m_{21} = \frac{\alpha_{21}^{(1)}}{\alpha_{11}^{(1)}} = \frac{1}{10^{-4}} = 10^4$$

$$a_{22}^{(2)} = fl\left(a_{22}^{(1)} - m_{21}\, a_{12}^{(1)}\right)$$

$$= fl\left(1 - 10^{4}\right)$$

$$= fl(-9999) = -10^{4}$$

$$b_{2}^{(2)} = fl\left(b_{2}^{(1)} - m_{21}\, b_{1}^{(1)}\right)$$

$$= fl\left(2 - 10^{4}\right)$$

$$= -10^{4}$$

$$\left.\begin{aligned} 10^{-4}x_1 + x_2 &= 1 \\ -10^{4}x_2 &= -10^{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{x_1 = 0}$$

$x_2 = 1$

πολύ κακή

προσέγγιση!

8/4/14

Οδήγηση

Παράδειγμα

$$\left.\begin{aligned} 10^{-4}x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \underline{\text{Λύση}}: \quad \begin{aligned} x_1 &= 1.0001\ldots \\ x_2 &= 0.9998. \end{aligned}$$

Υπολογιστής: $\beta = 10$, $t = 3$, στρογγύλευση

Προσεγγιστική λύση: $x_1 = 0$
$x_2 = 1$

Εναλλακτικός τρόπος: Για να μην έχουμε πολύ μικρό σε απόλυτη τιμή οδηγό, εναλλάσουμε τις γραμμές του συστήματος και το γράφουμε ως

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 10^{-4}x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Ο "υπολογιστής μας" δίνει τότε την προσεγγιστική λύση

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Πολύ καλή προσέγγιση για τη χρησιμοποιούμενη ακρίβεια.

Μερική οδήγηση (ή οδήγηση κατά γραμμές): Στο βήμα r της τριγωνοποίησης εξετάζουμε όλα τα στοιχεία $a_{kr}^{(r)}$, $k = r, r+1, \ldots, n$, και με εναλλαγή γραμμών φέρνουμε στη θέση του οδηγού ένα από αυτά που έχει τη μέγιστη απόλυτη τιμή

Επί πλέον κόστος:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

αφαιρέσεις. $\frac{n^2}{2}$

Παρατήρηση: Ο όρος "μικρός οδηγός" είναι ασαφής.
π.χ. Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή του συστήματος στο παράδειγμα επί 10^4 παίρνουμε

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 10^4 x_2 &= 10^4 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Η απαλοιφή Gauss χωρίς εναλλαγές γραμμών δίνει στον υπολογιστή μας πάλι

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

ενώ με εναλλαγή γραμμών δίνει

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Ο πραγματικός λόγος της αποτυχίας στην πρώτη περίπτωση είναι ότι

$$\left|\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}\right| = 10^{-4}$$

ενώ $\left|\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}}\right| = 1$

Ολική οδήγηση (ή οδήγηση κατά γραμμές και στήλες)

Στο βήμα r της τριγωνοποίησης θεωρούμε τα στοιχεία $\alpha_{kl}^{(r)}$, $k, l = r, \dots, n$, επιλέγουμε ένα με τη μέγιστη απόλυτη τιμή και με εναλλαγές γραμμών και στηλών το φέρνουμε στη θέση του οδηγού.

Επί πλέον κόστος:

της τάξης του n^3

- Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss χωρίς οδήγηση θεωρείται ασταθής αλγόριθμος. Για κάποιες κατηγορίες συστημάτων, π.χ. όταν ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος, δηλ. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ $x^T A x > 0$, είναι ευσταθής, και μόνο σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιείται στην πράξη.
- Η μέθοδος ολικής οδήγησης θεωρείται ευσταθής αλγόριθμος στην πράξη. Χρησιμοποιείται σπάνια γιατί διπλασιάζει το κόστο
- Η πιθανότητα να είναι ασταθής η μερική οδήγηση είναι πολύ μικρή

Χρησιμοποιείται πολύ στην πράξη γιατί αυξάνει το κόστος πολύ λίγο

Ο αλγόριθμος της απαλοιφής στην πράξη $\qquad Ax = b$

1ο στάδιο: Κάνουμε όλες τις πράξεις της τριγωνοποίησης που αφορούν τον πίνακα A.

Αποτέλεσμα: $A^{(n)}$ κάτω από τη διαγώνιο: πολλαπλασιαστές.

Ιδανική υλοποίηση: DECOMP

Κόστος: $\frac{n^3}{3}$

2ο στάδιο: Το αποτέλεσμα του πρώτου σταδίου και το b.
Δεδομένα: SOLVE

Γίνονται όλες οι πράξεις της τριγωνοποίησης που αφορούν το b και η οπισθοδρόμηση: Κόστος: n^2

$$A x' = b'$$
$$A x'' = b''$$

$$\frac{n^3}{3} + m \cdot n^2$$
το πλήθος των συστημάτων με τον ίδιο πίνακα

Παράδειγμα: $Au^i = e^i, i=1,\dots,n$

$A^{-1} = (u^1, u^2, \dots, u^n)$ | Κόστος n^3

(2/2)

Η ανάλυση LU
διάσπαση

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος.
Η φάση της τριγωνοποίησης του A κατά την απαλοιφή του Gauss μπορεί να ερμηνευθεί και ως ανάλυση του A σε γινόμενο $A = P^{-1}LU$ με $n \times n$ πίνακες P, L, U με τις εξής ιδιότητες:

- Ο P είναι ένας πίνακας μετάθεσης που καταγράφει τις εναλλαγές γραμμών του A κατά την απαλοιφή. Ένας πίνακας μετάθεσης προκύπτει από τον μοναδιαίο I_n με μετάθεση των γραμμών του.

- Ο L είναι κάτω τριγωνικός πίνακας με μονάδες στη διαγώνιο. Κάτω από τη διαγώνιο περιέχει τους πολλαπλασιαστές m_{ij}, $i>j$
- Ο U είναι το τελικό προϊόν $A^{(n)}$ της τριγωνοποίησης.

Έστω ότι αποδείξαμε την $A = P^{-1}LU$

Πώς μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να επιλύσουμε το σύστημα $Ax=b$;

<u>1η φάση</u>: Κατασκευή των πινάκων U $(=A^{(n)})$ L (πολλαπλασιαστές) και P (εναλλαγές γραμμών)

$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb$

<u>2η φάση</u>: $Ax=b \Leftrightarrow L\underbrace{Ux}_{y} = Pb$

2_1: $Ly = Pb$

Ο L είναι κάτω τριγωνικός, το σύστημα μπορεί να λυθεί

ως προς y_1 (πρώτη εξίσωση)

" " y_2 (γνωρίζοντας το y_1)

⋮

ως προς το y_n (τελευταία εξίσωση)

2_2: $Ux = y$ ← γνωστό

άνω τριγωνικός

οπισθοδρόμηση.

<u>1η Περίπτωση</u>: Δεν γίνονται εναλλαγές γραμμών

$(P = I_n)$ $\quad A = LU$

Ορίζοντας τον πίνακα M_1 ως

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -m_{21} & 1 & & \\ -m_{31} & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ -m_{n1} & & & 1 \end{pmatrix}$$

βλέπουμε ότι $A^{(2)} = M_1 A$

Παρόμοια με M_r, $r = 1, \dots, n-1$ πίνακες τω.

$$(M_r)_{ij} = \begin{cases} 1 & , i=j \\ -m_{ir}, & i = r+1, \dots, n, \\ 0 & \end{cases}$$

διαπιστώνουμε ότι $\boxed{A^{(n)} = M_{n-1} M_{n-2} \cdots M_2 M_1 A}$

Δηλαδή

$$U = M_{n-1} M_{n-2} \cdots M_2 M_1 A$$

$$\Rightarrow M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1} U = A$$

L

Οι πίνακες M_r είναι αντιστρέψιμοι, έχουν ορίζουσα ίση με 1, και

$$M_r^{-1} = \begin{cases} 1 & i=j, \\ m_{ir} & , i = r+1, \dots, n, \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Μάλιστα ισχύει

$$M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ m_{21} & 1 & & & \\ m_{31} & m_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} = L$$

<u>2η Περίπτωση:</u> → Με εναλλαγές γραμμών.

Η γραμμή την οποία στο βήμα i φέρνουμε στη θέση του οδηγού (δηλαδή αυτή που εναλλάσσεται με τη γραμμή i) ούτε αλλάζει πλέον θέση ούτε αλλοιώνονται τα στοιχεία της στη συνέχεια της απαλοιφής.

Επομένως, υπάρχει μία μετάθεση των γραμμών του πίνακα A που αν την κάναμε πριν από το πρώτο βήμα, θα οδηγούσε σε έναν πίνακα A', η τριγωνοποίηση του οποίου θα μπορούσε να γίνει χωρίς εναλλαγές γραμμών. Άρα σύμφωνα με την 1η περίπτωση θα έχουμε

$$A' = LU$$

με L, U πίνακες με τις επιθυμητές ιδιότητες.

Ο πίνακας μετάθεσης $\underline{P}$ που αντιστοιχεί στη μετάθεση

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

των πρώτων n φυσικών αριθμών, προκύπτει από τον μοναδιαίο πίνακα I_n, αν μεταθέσουμε τις γραμμές του κατά τη μετάθεση Π, δηλαδή η γραμμή i_k του $\underline{P}$ είναι η γραμμή k του I_n

Παράδειγμα:

Μετάθεση: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Αντίστοιχος πίνακας μετάθεσης:

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Το

$\underline{P}A$ προκύπτει από τον A με τη μετάθεση των γραμμών του A που από τον I_n οδηγούν στον $\underline{P}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

10/4/14

Ανάλυση LU

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος

1η Περίπτωση: Δεν γίνονται εναλλαγές γραμμών

Τότε, όπως είδαμε, $A = \overset{P^{-1}}{L}U$ με L κάτω τριγωνικό πίνακα, με μονάδες στη διαγώνιο, και U άνω τριγωνικό

$\underline{P} = I_n$

2η Περίπτωση: Με εναλλαγές γραμμών.

Τότε, όπως είδαμε, υπάρχει ένας πίνακας A', που προκύπτει από τον A με κατάλληλες εναλλαγές γραμμών, τ.ω.

$A' = LU$

με L, U όπως παραπάνω

Όμως, όπως είδαμε, ο A' γράφεται στη μορφή $A' = \underline{P}A$ με $\underline{P}$ πίνακα μετάθεσης.

Επομένως, $\underline{P}A = LU$ ή $A = \underline{P}^{-1}LU$.

Παρατήρηση: $P^T\underline{P} = I_n \Rightarrow \underline{P}^{-1} = \underline{P}^T$.

Παράδειγμα

1: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$m_{21} = \frac{1}{2}$ (απαλοιφή Gauss)

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

Επαλήθευση

$LU = \dots = A$.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

Απαλοιφή Gauss

$m_{21} = \frac{1}{2}$, $m_{31} = 1$ $\quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Απαιτούνται εναλλαγές γραμμών γιατί προκύψε οδηγός $= 0$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $PA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = B$

<u>Απαλοιφή Gauss:</u>

$m_{21} = 1$, $m_{31} = \frac{1}{2}$

$B^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = U$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A = P^{-1} L U$

$P^{-1} = P^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

<u>Επαλ.</u>

$P^{-1} L U = \ldots = A$

✓ • Άμεσες μέθοδοι
• Κατάσταση συστημάτων
• Επαναληπτικές μέθοδοι

<u>Κατάσταση συστημάτων</u>

<u>Παράδειγμα</u>

$$\begin{pmatrix} 0.913 & 0.659 \\ 0.780 & 0.563 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.254 \\ .217 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Απαλοιφή Gauss (χωρίς οδήγηση, με μερική οδήγηση ή με ολική οδήγηση, αφού συμπίπτουν):

$\beta = 10,\ t = 3$, αποκοπή

$$m_{21} = 0.854$$

$$a_{22}^{(2)} = .001 \quad b_2^{(2)} = .001$$

<u>Προσεγγιστική λύση</u>: $\tilde{x}_1 = -.443$, $\tilde{x}_2 = 1$ } τελείως λανθασμένη

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0.913 & 0.659 \\ 0.780 & 0.563 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.253 \\ 0.218 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{matrix} y_1 = 1223 \\ y_2 = -1694 \end{matrix}\right\}$$

μικρή μεταβολή στα δεδομένα
τεράστια μεταβολή στη λύση!

$$\det A = -10^{-6}$$

<u>Ερώτημα:</u> Το γεγονός ότι η ορίζουσα του A είναι μικρή αποτελεί λόγο για την κακή κατάσταση του συστήματος;

<u>Απάντηση:</u> ΟΧΙ

Δικαιολογία:

$$\underbrace{10^4 A}_{\tilde{A}} x = 10^4 \begin{pmatrix} 0.254 \\ 0.217 \end{pmatrix}$$

Έχει την ίδια κατάσταση με το $Ax=b$.

$$\det \tilde{A} = (10^4)^2 \det A$$
$$= 10^8 (-10^{-6})$$
$$= -100 \quad \text{όχι μικρό}$$

Ποιος είναι ο λόγος που το σύστημα έχει κακή κατάσταση;

Προεργασία: Απαιτείται ένα "μέτρο" για τις μεταβολές διανυσμάτων και πινάκων. Ένα βολικό τέτοιο μέτρο αποτελούν οι νόρμες διανυσμάτων και πινάκων που είναι γενίκευση της απόλυτης τιμής αριθμών.

Νόρμες διανυσμάτων και πινάκων

• Νόρμες διανυσμάτων

Ορισμός (Νόρμα) Έστω X ένας γραμμικός χώρος στο $\mathbb{R}$ ή στο $\mathbb{C}$ και $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, αντίστοιχα. Μία απεικόνιση

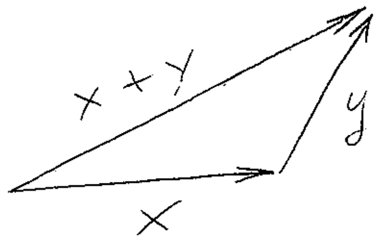
$$\| \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \|x\|$$

λέγεται νόρμα (στάθμη, norm) αν ισχύουν:

(N1) $x \in X \quad \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$

(N2) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in X \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

(N3) $\forall x, y \in X \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα)



(2/2)

Παρατηρήσεις:

α) $\forall x \in X \quad \|x\| \geq 0$

$$0 = \|x - x\| = \|x + (-x)\| \underset{(N3)}{\leq} \|x\| + \|-x\|$$
$$\underset{(N2)}{=} \|x\| + \|x\| = 2\|x\| \Rightarrow 2\|x\| \geq 0$$

β) $\forall x, y \in X \quad \|x - y\| \geq \big| \|x\| - \|y\| \big|$

(τριγωνική ανισότητα προς τα κάτω)

$$\|x\| = \|(x-y) + y\| \underset{(N3)}{\leq} \|x-y\| + \|y\|$$

$\Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$

Αντίστοιχα

$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$

$\left.\begin{array}{l} \alpha \geq \beta \\ \alpha \geq -\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \geq |\beta|$

Άρα

$$\|x - y\| \geq \big| \|x\| - \|y\| \big|$$

Παραδείγματα:

1. $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ με $\|x\| := |x|$

   $(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$ με $\|x\| := |x|$

2. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ με $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ με

   $x = (x_1, \dots, x_n)^T$

   (ℓ_1 νόρμα)

Πράγματι:

(N1): $\|x\|_1 = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \iff x_i = 0, \quad i=1,\dots,n$

$\iff x = 0$

(N2): $\lambda \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^n$

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda| |x_i|$$

$$= |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda| \|x\|_1$$

(N3): $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i+y_i|}_{\leq |x_i|+|y_i|} \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i|+|y_i|)$$

$\alpha \leq \beta \geq \gamma$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

3. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ $\quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

"l_∞ νόρμα"

"νόρμα μεγίστου"

απόδειξη: εύκολη

4. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ με $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$

"l_2 νόρμα"

"Ευκλείδεια νόρμα"

$(\cdot,\cdot)_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y)_2 := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

εσωτερικό γινόμενο

(ευκλείδειο)

<u>Παρατήρηση</u> $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x,x\rangle_2}$

(N1), (N2) πολύ εύκολες...

(N3):

<u>Ανισότητα των Cauchy-Schwarz:</u>

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^n \qquad |\langle x,y\rangle_2| \le \|x\|_2\cdot\|y\|_2$$

<u>1η Περίπτωση:</u> $y=0$ ✓

<u>2η Περίπτωση:</u> $y\neq 0$

Τότε, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, έχουμε

$$0\le \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle_2 = \|x\|_2^2 + \langle x,\lambda y\rangle_2 + \langle \lambda y, x\rangle_2 + \lambda^2\|y\|_2^2$$

$$= \|x\|_2^2 + 2\langle x,y\rangle_2\lambda + \|y\|_2^2\lambda^2$$

$y\neq 0$

$$0\le \underbrace{\|x\|_2^2 + 2\langle x,y\rangle_2\lambda + \|y\|_2^2\lambda^2}_{\varphi(\lambda)}$$

$\forall \lambda\in\mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ Διακρίνουσα $\Delta\le 0$

$$\Delta = (2\langle x,y\rangle_2)^2 - 4\|y\|_2^2\|x\|_2^2 \le 0$$

$$\Longrightarrow \cancel{4}\langle x,y\rangle_2^2 \le \cancel{4}\|x\|_2^2\cdot\|y\|_2^2$$

$$\Longrightarrow |\langle x,y\rangle_2| \le \|x\|_2\cdot\|y\|_2$$

Άρα:

$$\|x+y\|_2^2 = \langle x+y, x+y\rangle_2 = \|x\|_2^2 + 2\langle x,y\rangle_2 + \|y\|_2^2$$

$$\underset{CS}{\leq} \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2$$

$$= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$$

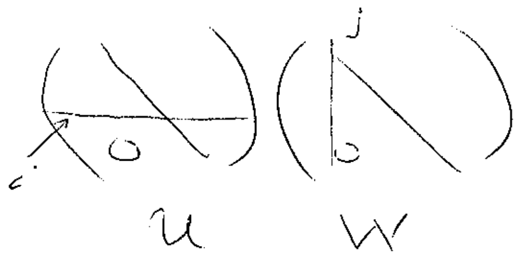
$$\Longrightarrow \|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$$

11/4/14

Απορίες

Τετάρτη, 7-5-14

Ώρες: 10-12



$(UW)_{ij}$

το ίδιο συμβαίνει και με κάτω τριγωνικούς

Άσκηση 3.1

$U, W \in \mathbb{R}^{n,n}$ άνω τριγωνικοί

$\Rightarrow UW$ " "

$$(UW)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} U_{ik} W_{kj}$$

$$= \sum_{k=i}^{n} U_{ik} W_{kj}$$

U άνω τριγωνικός

$$= U_{ii} W_{ij} + U_{i,i+1} W_{i+1,j} + \dots + U_{in} W_{nj}$$

Για $i > j$ έχουμε

$$(UW)_{ij} = U_{ii} \underbrace{W_{ij}}_{=0} + \dots + U_{in} \underbrace{W_{nj}}_{=0} = 0$$

$U \in \mathbb{R}^{n,n}$, άνω τριγ. + αντιστρ.

$\Rightarrow U^{-1}$ άνω τριγ.

Έστω $k \in \{1, \dots, n\}$

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$U x^k = e^k$$

Τότε $U^{-1} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$

Θα δείξουμε ότι $x^k_{k+1} = x^k_{k+2} = \dots = x^k_n = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & & \vdots \\ \hline 0 & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ \hline \vdots \\ x_n^k \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right) \leftarrow k$$

Με οπισθοδρόμηση βλέπουμε ότι

$$x_n^k = x_{n-1}^k = \cdots = x_{k+2}^k = 0$$

Άσκηση 3.3

$A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$

A αντιστρέψιμος

$b \in \mathbb{R}^n$

- $A^{-4} b$
- $A^{-1} B A^{-1} b$

$x = A^{-4} b \Rightarrow A^4 x = b$

$A\underbrace{(A^3 x)}_{y} = b$

$A^3 x = y \Rightarrow A \underbrace{(A^2 x)}_{z} = y$

$A^2 x = z$

$A \underbrace{(A x)}_{w} = z$

Λύνουμε τα συστήματα

$Ay = b \rightsquigarrow y$

$Az = y \rightsquigarrow z$

$Aw = z \rightsquigarrow w$

$Ax = w$

Λύνουμε 4 γραμμικά συστήματα με πίνακα συντελεστών τον A

$A^{-1} B (A^{-1} b)$

$y = A^{-1} b \Rightarrow Ay = b \rightsquigarrow y$

$\underbrace{A^{-1} (By)}_{x}$

$x = A^{-1} By \Rightarrow$

$Ax = By$

Λύνουμε το σύστημα $Ay=b$, βρίσκουμε το By και λύνουμε το σύστημα $Ax = By$

Τότε $x = A^{-1} B A^{-1} b$

Άσκηση 3.6

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ 0 & & & a_{i+1,i} & 1 & \\ & & & \vdots & & \ddots \\ & & & a_{ni} & & & 1 \end{pmatrix}$$

$i = 1, \dots, n-1$

ΝΔΟ

$$A_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & -a_{i+1,i} & \ddots & \\ & & & \vdots & & 1 \\ & & & -a_{ni} & & \end{pmatrix}$$

Για $i<j$, ισχύει

$$A_i A_j = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ 0 & & & a_{i+1,i} & \ddots & & \\ & & & \vdots & & 1 & \\ & & & \vdots & 0 & a_{j+1,j} & \ddots \\ & & & a_{ni} & & \vdots & \\ & & & & & a_{nj} & & 1 \end{pmatrix}$$

$AB = A + B - I_n + (A - I_n)(B - I_n)$

Για $i \leq j$, ισχύει

$$(A_i - I_n)(A_j - I_n) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & a_{i+1,i} & \ddots \\ & & & \vdots & \\ & & & a_{ni} & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & 0 & & \\ & & a_{j+1,j} & \ddots & \\ 0 & & a_{nj} & & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Η γραμμή είναι στη δεν

__Συμπέρασμα:__ Για $i \leq j$ ισχύει $A_i A_j = A_i + A_j - I_n$

__Εφαρμογή:__ $A_i A_i^{-1} = I_n$

$$A_i A_j = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ 0 & & a_{i+1,i} & 1 & & & \\ & & \vdots & & a_{j+1,j} & \ddots & \\ & & a_{ni} & 0 & a_{nj} & & 1 \end{pmatrix}$$

__Άσκηση 3.7__

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμο)

$\underline{A = L\mathcal{U}}$ → τα διαγώνια στοιχεία του L είναι μονάδες.

$A = \tilde{L}\tilde{\mathcal{U}}$

ΝΔΟ: $\tilde{L} = L$ και $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$

$$L\mathcal{U} = \tilde{L}\tilde{\mathcal{U}} \Rightarrow$$

$$\tilde{L}^{-1} L \mathcal{U} = \underbrace{\cancel{\tilde{L}^{-1}\tilde{L}}}_{= I_n}\tilde{\mathcal{U}}$$

$$\Rightarrow \tilde{L}^{-1} L \mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}}$$

$$\Rightarrow \tilde{L}^{-1} L \underbrace{\cancel{\mathcal{U}\mathcal{U}^{-1}}}_{= I_n} = \tilde{\mathcal{U}}\mathcal{U}^{-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\tilde{L}^{-1} L}_{\text{κάτω τριγωνικός}} = \underbrace{\tilde{\mathcal{U}}\mathcal{U}^{-1}}_{\text{άνω τριγωνικός}}$$

~~Συμπέρασμα~~

$$\Rightarrow \tilde{L}^{-1} L = \tilde{\mathcal{U}}\mathcal{U}^{-1} = D = \mathrm{diag}(d_{11}, \dots, d_{nn})$$

Επομένως έχουμε

$$\tilde{L}^{-1} L = D \Rightarrow L = \tilde{L} D \Rightarrow$$

$$L_{ii} = (\tilde{L} D)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{L}_{ik} d_{ki} = \tilde{L}_{ii} \, d_{ii}$$

$$\Rightarrow \underbrace{L_{ii}}_{=1} = \underbrace{\tilde{L}_{ii}}_{=1} d_{ii} \Rightarrow d_{ii} = 1, \Rightarrow D = I_n$$

$$\tilde{L}^{-1} L = I_n \leadsto L = \tilde{L} I_n = \tilde{L}$$

$$\tilde{U} U^{-1} = I_n \leadsto \tilde{U} = I_n U = U$$

Παρασκευή, 2-5: 12-14
", 9-5: 12-14
Δευτέρα, 5-5: 12-14

29/4/14

Νόρμες διανυσμάτων

X γραμμικός χώρος στο $\mathbb{R}$ ή στο $\mathbb{C}$, και
$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.
$\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ νόρμα:
(N1) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$
(N2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall x \in X \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
(N3) $\forall x, y \in X \quad \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

Παραδείγματα

5. $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$, $p=1, \infty, 2$

$z \in \mathbb{C}^n$
$$\|z\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |z_i|$$

$$\|z\|_\infty := \max_{1 \le i \le n} |z_i|$$

$$\|z\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)^{1/2}$$

Εσωτερικό γινόμενο

$$(x,y)_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

Τότε
$$\|z\|_2 = (z,z)_2^{1/2}$$

6. $\left(C[a,b], \ \|\cdot\|_\infty \right)$

$$\|f\|_\infty := \max_{a \le x \le b} |f(x)|$$

Με: $-\infty < a < b < \infty$

(N1): $\|f\|_\infty = 0 \iff \max_{a \le x \le b} |f(x)| = 0$

$\iff f(x) = 0 \ \forall x \in [a,b] \iff f = 0$

(N2): $\lambda \in \mathbb{R}$ $f \in C[a,b]$

$$\|\lambda f\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |\lambda f(x)|$$

$$= \max_{a \le x \le b} \left(|\lambda| \, |f(x)| \right)$$

$$= |\lambda| \underbrace{\max_{a \le x \le b} |f(x)|}_{\|f\|_\infty}$$

$$= |\lambda| \, \|f\|_\infty$$

(N3): $f, g \in C[a,b]$ για κατάλληλο $\tilde{x}$

$$\|f+g\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x)+g(x)| = |f(\tilde{x})+g(\tilde{x})|$$

$$\le |f(\tilde{x})| + |g(\tilde{x})|$$

$$\le \max_{a \le x \le b} |f(x)| + \max_{a \le x \le b} |g(x)|$$

$$= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Ορισμός (Ισοδυναμία νορμών)

Έστω X ένας γραμμικός χώρος. Δύο νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ του X λέγονται ισοδύναμες (ή συγκρίσιμες), αν υπάρχουν θετικές σταθερές m και M τ.ω.
$\forall x \in X \quad m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|$
(οπότε θα ισχύει και

$$\frac{1}{M}\|x\|' \leq \|x\| \leq \frac{1}{m}\|x\|'$$

Λήμμα (Ισοδυναμία νόρμας με τη νόρμα μεγίστου)

Κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ του $\mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμη με τη νόρμα μεγίστου $\|\cdot\|_\infty$ του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη (μόνο για τη μία κατεύθυνση)

Έστω $\{e^1, \dots, e^n\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Τότε, για $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, έχουμε

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e^i, \text{ οπότε}$$

$$\|x\| := \Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i e^i \Big\| \leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\|x_i e^i\|}_{|x_i|\cdot\|e^i\|} = \sum_{i=1}^{n} \overset{\leq \|x\|_\infty}{|x_i|} \|e^i\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty \|e^i\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} \|e^i\|\Big) \|x\|_\infty$$

$\| \; M$ (ανεξάρτητο του x)

Πρόταση (Ισοδυναμία νορμών στον $\mathbb{R}^n$)

Όλες οι νόρμες στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμες μεταξύ τους

Απόδειξη Έστω $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ νόρμες στον $\mathbb{R}^n$.

Τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα, υπάρχουν θετικές σταθερές m, M και m', M' τ.ω.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad m\|x\|_\infty \overset{(2)}{\leq} \|x\| \overset{(1)}{\leq} M\|x\|_\infty$$

$$'' \quad m'\|x\|_\infty \overset{(2')}{\leq} \|x\|' \overset{(1')}{\leq} M'\|x\|_\infty$$

Άρα: $\forall x \in \mathbb{R}^n$: (1) $\leq \frac{1}{m'}\|x\|'$

$$\|x\| \leq M \|x\|_\infty \overset{(2')}{\leq} \frac{M}{m'}\|x\|'$$

και

$$\|x\| \overset{(2)}{\geq} m\|x\|_\infty \overset{(1')}{\geq} m\frac{1}{M'}\|x\|' = \overset{\tilde{m}}{\frac{m}{M'}}\|x\|'$$

δηλ. $\tilde{m}\|x\|' \leq \|x\| \leq \tilde{M}\|x\|'$

<u>Ορισμός</u> (Σύγκλιση ακολουθιών)

Λέμε ότι μία ακολουθία $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset X$

<u>συγκλίνει</u> ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ του X,

να υπάρχει $x\in X$ (το όριο της ακολουθίας ως προς νόρμα $\|\cdot\|$), αν

$\|x^{(n)} - x\| \to 0$, για $n\to\infty$

<u>Συμβολισμός</u>

$x^{(n)} \to x$, για $n\to\infty$

$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x$

(ως προς μία συγκεκριμένη νόρμα)

Στον $\mathbb{R}^n$, λόγω της ισοδυναμίας των νορμών, αν μία ακολουθία $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει

ως προς κάποια νόρμα, τότε συγκλίνει και ως προς οποιαδήποτε άλλη νόρμα του $\mathbb{R}^n$. Ιδιαίτερα, συγκλίνει ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, οπότε

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x \iff \lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i$$

$i = 1, \ldots, n$

(2/2)

ακολουθία Cauchy
(βασική ακολουθία)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}: \forall \varepsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N} \ \forall n,m\geq N$

$|a_n - a_m| < \varepsilon$

$(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ " " "

$\|x^{(n)} - x^{(m)}\| < \varepsilon$

$(X, \|\cdot\|)$

<u>Ορισμός</u> Ένας γραμμικός χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$ λέγεται <u>πλήρης</u>, αν κάθε ακολουθία Cauchy $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ ως προς τη $\|\cdot\|$ συγκλίνει, <u>δηλαδή</u>:

$(\forall \varepsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N} \ \forall n,m\geq N \ \|x^{(n)}-x^{(m)}\| < \varepsilon)$
$\Longrightarrow \exists x\in X \ \|x^{(n)}-x\| \to 0$, για $n\to\infty$

<u>Λήμμα</u> Ο χώρος $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης

<u>Πρόταση</u> Έστω $\|\cdot\|$ μία νόρμα στον $\mathbb{R}^n$.
Τότε ο $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι πλήρης

Νόρμες πινάκων

Μία απεικόνιση $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$ λέγεται **νόρμα πινάκων**, αν ικανοποιεί τις (Ν1), (Ν2), (Ν3) και

(Ν4) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Θα ασχοληθούμε μόνο με τις λεγόμενες **φυσικές νόρμες πινάκων**.

Παρατήρηση. Έστω $\|\cdot\|$ νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Τότε, για $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, έχουμε (Υπάρχουν m, M θετικές σταθερές τ.ω $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $m\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M\|x\|_\infty$)

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \frac{M\,\|Ax\|_\infty}{m\,\|x\|_\infty} = \frac{M}{m}\,\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

$$\left((Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)$$

$$= \frac{M}{m}\,\frac{\max\limits_{1\leq i\leq n} \left| \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|}{\|x\|_\infty}$$

$$\leq \frac{M}{m}\,\frac{\max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|\, \overbrace{|x_j|}^{\leq \|x\|_\infty}}{\|x\|_\infty}$$

$$\leq \underbrace{\frac{M}{m} \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}_{\text{ανεξ. του } x.}$$

Ορισμός (Φυσική νόρμα πινάκων)

Έστω $\|\cdot\|$ μία νόρμα στον $\mathbb{R}^n$.

Η απεικόνιση

$$\|\cdot\|: \mathbb{R}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

λέγεται φυσική νόρμα πινάκων

(ή νόρμα παραγόμενη ή επαγόμενη από τη νόρμα $\|\cdot\|$ του $\mathbb{R}^n$).

Παρατήρηση:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

Πρόβλημα: Πώς υπολογίζουμε μία φυσική νόρμα ενός πίνακα;

i. Έστω c_1 μία σταθερά τ.ω.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|Ax\| \leq c_1 \|x\|$$

Τότε $\|A\| \leq c_1$.

ii. Έστω $c_2 > 0$ και $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$.

Τότε $\|Ay\| \geq c_2 \|y\| \Longrightarrow \|A\| \geq c_2$

Γενικά ο υπολογισμός της $\|A\|$ δεν είναι εύκολος

Παραδείγματα

1 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$

$A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n,n}$

Αντίστοιχη φυσική νόρμα:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

(νόρμα του αθροίσματος γραμμών)

2. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

νόρμα του αθροίσματος στηλών

$A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 4 & -7\end{pmatrix}$

$\|A\|_\infty = 11,$

$\|A\|_1 = 10$

3. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$

$$\|A\|_2 = \left(\rho(A^TA)\right)^{1/2}$$

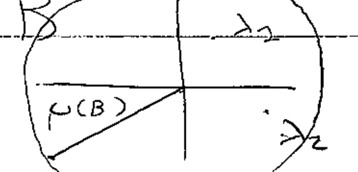
φασματική νόρμα

Ευκλείδεια

Έστω $B\in\mathbb{C}^{n,n}$ και $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{C}$ οι ιδιοτιμές του

$\rho(B) := \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|$

φασματική ακτίνα του B



Για $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ οι $\|A\|_1$ και $\|A\|_\infty$

δίνονται από τους ίδιους τύπους, ενώ

$$\|A\|_2 = \left(\rho(A^*A)\right)^{1/2}$$

με $(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$

Δευτέρα, 5-5
Ώρες: 12-14
Αίθουσα I2

2/5/14

$A \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad A = P^{-1} L U$

Ερώτημα: Σε ποιές περιπτώσεις μπορώ να επιλέξω $P = I_n$;

Άσκηση 3.10

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$\delta_i := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}, \quad i = 1, \dots, n.$$

κύριες ορίζουσες του A

ΝΔΟ: Αν $\delta_i \neq 0$ για $i = 1, \dots, n-1$, τότε $A = LU$

(Αν $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος ισχύει και το αντίστροφο)

Απόδειξη

Το πρώτο βήμα της απαλοιφής Gauss γίνεται χωρίς πρόβλημα (χωρίς εναλλαγές γραμμών) γιατί $a_{11} = \delta_1 \neq 0$

Έστω ότι γίνονται χωρίς εναλλαγές γραμμών $i-1$ βήματα της απαλοιφής

Τότε έχουμε

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1i}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2i}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{ii}^{(i)} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix} = \delta_i \neq 0$$

Επομένως, $a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{ii}^{(i)} = \delta_i \neq 0$
$\Rightarrow a_{ii}^{(i)} \neq 0$.
Συνεπώς, και το βήμα i της απαλοιφής γίνεται χωρίς εναλλαγές γραμμών

Συμπέρασμα: Στην απαλοιφή του Gauss δεν απαιτούνται εναλλαγές γραμμών, οπότε $P = I_n$

Άσκηση 3.11 // είναι μανική ανιθήμη

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο,

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n$$

- $\Rightarrow A$ αντιστρέψιμος
- $A = LU$

$Ax = 0 \Rightarrow (Ax)_i = 0, \; i = 1, \ldots, n$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$

$\Rightarrow a_{ii} x_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j$ // μέχρι εδώ ισχύει
// πάντα

$$\Rightarrow \boxed{|a_{ii}| \cdot |x_i| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \, |x_j| , \quad i = 1, \ldots, n} \quad (*)$$

Έστω ℓ τ.ω. $|x_\ell| = \|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$

Τότε, η $(*)$ για $i = \ell$, δίνει

$$|a_{\ell\ell}| \cdot |x_\ell| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{n} |a_{\ell j}| \underbrace{|x_j|}_{= |x_\ell|}$$

$$\Rightarrow |a_{\ell\ell}| \cdot |x_\ell| \leq \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{n} |a_{\ell j}| \right) |x_\ell|$$

Έστω $x_\ell \neq 0$. Τότε, απλοποιώντας στην προηγού-
μενη ανίσωση, παίρνουμε

$$|a_{\ell\ell}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{n} |a_{\ell j}|,$$ άτοπο!!

Συμπέρασμα: $x_\ell = 0$, οπότε $x=0$

Τί αποδείξαμε;

$Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

Συμπέρασμα: A αντιστρέψιμος

• Έστω $i \in \{1, \dots, n-1\}$

Τότε, ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο, οπότε, όπως είδαμε μόλις, είναι αντιστρέψιμος.

Συμπέρασμα: $\delta_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n-1$.

Επομένως, σύμφωνα με την Άσκηση 3.10, ο A γράφεται στη μορφή $A = LU$

//να θυμάμαι τα ονόματα.

Άσκηση 3.23

α) $1 < p, q < \infty$ τω $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$\alpha, b \geq 0$

<u>Ανισότητα του Young.</u>

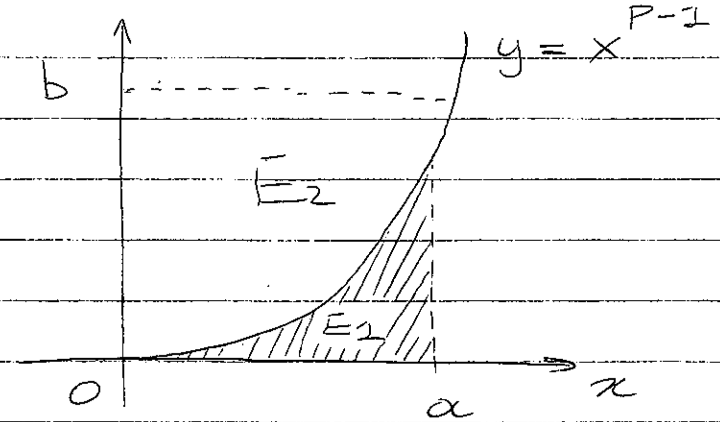
$$\alpha b \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

$p = 2$:

$$2\alpha b \leq \alpha^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - b)^2 \geq 0$$

<u>Γεωμετρική ερμηνεία:</u>



// αν την ολοκληρώσω

// το άθροισμα των 2 εμβα-
// δών είναι ≥ του εμβαδού
// του ορθογων.

$$E_1 = \int_0^{\alpha} x^{p-1}\, dx = \frac{\alpha^p}{p}$$

$$E_2 = \int_0^{b} y^{\frac{1}{p-1}}\, dy$$

$$= \int_0^{b} y^{q-1}\, dy = \frac{b^q}{q}$$

$\cancel{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}}$

$\frac{1}{p-1} = q - 1 \Leftrightarrow$

$(p-1)(q-1) = 1 \Leftrightarrow$

$pq - p - q + \cancel{1} = \cancel{1} \Leftrightarrow$

$p + q = pq \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

(2/2)

β) $1 \leq p < \infty$, $\|\cdot\|_p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$,

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Για $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q \quad \text{με } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

<u>Ανισότητα του Hölder</u>

$p = 1 : q = \infty$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i \cdot y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| \right) \left(\max_{1 \leq j \leq n} |y_j| \right)$$

<u>τετριμ.</u>

$x = 0$ ή $y = 0$ ✓

<u>Υπόθεση</u>: <u>$p > 1$, $x, y \neq 0$</u>

<u>1η Περίπτωση</u>: $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$

Σύμφωνα με την ανισότητα του Young έχουμε

$$|x_i y_i| \leq \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q}, \quad i = 1, \ldots, n$$

Άρα

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \frac{1}{p} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}_{\|x\|_p^p = 1} + \frac{1}{q} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q}_{\|y\|_q^q = 1}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

<u>2η Περίπτωση</u>: Γενική

Θέτουμε $\tilde{x} := \dfrac{x}{\|x\|_p}$, $\tilde{y} := \dfrac{y}{\|y\|_q}$

Τότε $\|\tilde{x}\|_p = \|\tilde{y}\|_q = 1$,

οπότε σύμφωνα με την προηγούμενη περίπτωση,

$$\sum_{i=1}^{n} |\tilde{x}_i \tilde{y}_i| \leq 1$$

Επομένως,

$$\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq 1$$

γ) ΝΔΟ: $\|\cdot\|_p$ νόρμα στον $\mathbb{C}^n$

(N_1), (N_2) τετριμμ.

(N_3) $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

αvισότητα του Minkowski

- $p=1$ ✓
- $p>1$

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i+y_i|}_{\le |x_i|+|y_i|}\cdot|x_i+y_i|^{p-1}$$

$$\le \sum_{i=1}^n |x_i|\,\underbrace{|x_i+y_i|^{p-1}}_{|z_i|} + \sum_{i=1}^n |y_i|\,\underbrace{|x_i+y_i|^{p-1}}_{|z_i|}$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\le} \|x\|_p\cdot\left(\sum_{i=1}^n \left(|x_i+y_i|^{p-1}\right)^q\right)^{1/q}$$

$$+\ \|y\|_p \qquad //$$

$$= \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)\left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{\overset{p}{(p-1)q}}\right)^{1/q}$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Longrightarrow \frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}=\frac{p-1}{p}$$

$$\frac{1}{q}=\frac{p-1}{p}$$

$$= \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right) \left(\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}}_{\|x+y\|_p} \right)^{p-1}$$

$$= \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right) \|x+y\|_p^{p-1}$$

$$\|x+y\|_p^{\cancel{p}} \le \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right) \cancel{\|x+y\|_p^{p-1}}$$

$$\Rightarrow \|x+y\|_p \le \|x_p\| + \|y\|_p$$

δ) $x \in \mathbb{C}^n$ και $1 \le p < q \le \infty$

<u>ΝΔΟ:</u> $\|x\|_q \le \|x\|_q$.

<u>Ανισότητα του Jensen</u>

<u>Απόδειξη:</u>

<u>1η Περίπτωση:</u> $q = \infty$

Προφανώς

$$|x_i| \le \|x\|_p, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\|x\|_p^p = |x_1|^p + \dots + |x_n|^p \ge |x_i|^p$$

$$\Rightarrow |x_i| \le \|x\|_p, \; i=1,\dots,n$$

Επομένως

$$\max_{1 \le i \le n} |x_i| \le \|x\|_p$$

ή $\|x\|_\infty \le \|x\|_p$.

2η Περίπτωση $q < \infty$

$$|x_i|^q = |x_i|^p \cdot |x_i|^{q-p}$$

>0

$\leq \|x\|_p$

$$\Rightarrow |x_i|^q \leq \|x\|_p^{q-p} |x_i|^p, \quad i=1,\dots,n$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q}_{\|x\|_q^q} \leq \|x\|_p^{q-p} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}_{\|x\|_p^p}$$

$$\Rightarrow \|x\|_q^{\cancel{q}} \leq \|x\|_p^{\cancel{q}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|x\|_q \leq \|x\|_p}$$

Άσκηση 3.24

$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ στον $\mathbb{R}^n$

Βέλτιστες σταθερές σύγκρισης (ανά δύο)

• Σύμφωνα με την ανισότητα του Jensen, έχουμε

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

Γιατί $x = e^i$ ισχύουν ως ισότητες άρα οι σταθερές δεν μπορούν να βελτιωθούν.

α) $\|x_1\| \leq n\|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty = n\|x\|_\infty.$$

Για $x = (1, 1, \dots, 1)^T$ ισχύει ως ισότητα

β) $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty^2 = n\|x\|_\infty^2$$

$$\Rightarrow \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$$

Για $x = (1, 1, \dots, 1)^T$ ισχύει ως ισότητα

γ) $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot |x_i| \underset{CS}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{n}\,\|x\|_2$$

Για $x = (1, \dots, 1)^T$ ισχύει ως ισότητα

5/5/14

Δείκτης κατάστασης γρ. συστημάτων

$Ax=b$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρ.

Πρόβλημα: Μελέτη της κατάστασης του γραμμικού συστήματος.

Απλούστερη περίπτωση:

$$\begin{cases} Ax = b & \Delta b \in \mathbb{R}^n \\ A(x+\Delta x) = b + \Delta b \end{cases}$$

Ερώτημα: Πώς μπορούμε να εκτιμήσουμε τη σχετική μεταβολή;

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$$

συναρτήσει της $\dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$

Έστω $\|\cdot\|$ είναι μία νόρμα στον $\mathbb{R}^n$

Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|$ και τη φυσική νόρμα πινάκων, που παράγεται από τη νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$

$$A(x+\Delta x) = b + \Delta b \Rightarrow$$

$$\cancel{Ax} + A\Delta x = \cancel{b} + \Delta b \Rightarrow$$

$$\boxed{A\Delta x = \Delta b}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta x = A^{-1}\Delta b \quad \Rightarrow$$

$$\|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta b\| \leq \|A^{-1}\|\cdot\|\Delta b\|$$

$$\boxed{\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\|\cdot\|\Delta b\|}$$

Έστω ότι $b \neq 0$. Τότε, $x \neq 0$

Επομένως

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\cdot\|\Delta b\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{-1}\|\cdot\|\Delta b\|}{\frac{\|b\|}{\|A\|}}$$

$$= \|A\|\cdot\|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

$$Ax = b \Rightarrow \|b\| \leq \|A\|\cdot\|x\|$$

$$\Rightarrow \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$$

Συμπέρασμα

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\cdot\|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

$\kappa(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

cond

Δείκτης κατάστασης

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq \|A A^{-1}\| = \|I_n\| = 1$$

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Όσο μικρότερος είναι ο $\kappa(A)$ τόσο καλύτερη είναι η κατάσταση του $Ax=b$.
Για $\kappa(A) \gg 1$, η κατάσταση του A (ή του $Ax=b$) είναι κακή.
// μεταβάλλω και το A και το b.

Θεώρημα (Εκτίμηση της σχετικής μεταβολής λύσεων γραμμικών συστημάτων)

Έστω $\|\cdot\|$ μία νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ καθώς και η αντίστοιχη παραγόμενη νόρμα πινάκων. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας, $\Delta A \in \mathbb{R}^{n,n}$, και $b, \Delta b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$. Τότε, αν $\kappa(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$, έχουμε:

α) $\left.\begin{aligned} Ax &= b \\ A(x+\Delta x) &= b + \Delta b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$

β) $$\left.\begin{array}{l} Ax = b \\ (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b \\ \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

([illegible] είναι μαζί [illegible] α)

γ) $$\left.\begin{array}{l} Ax = b \\ (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b \\ \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} \left[\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right]$$

Απόδειξη

α) το αποδείξαμε ήδη

Βοηθητικό αποτέλεσμα για τα β) και γ):

Έστω $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ τω

$\exists\, c > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n \;\; \|Bx\| \geq c\|x\|$

Τότε, ο B είναι αντιστρέψιμος και
$$\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$$

αρν. δεν μπορεί

Έστω $Bx = 0$ Τότε $0 \geq c\|x\|$,
οπότε $\|x\| = 0$, όπως $x = 0$
Άρα ο B είναι αντιστρέψιμος

Για $y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$c\|B^{-1}y\| \leq \|BB^{-1}y\| = \|y\|$$

$$\Rightarrow \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \quad \|B^{-1}y\| \leq \frac{1}{c}\|y\|$$

Επομένως, $\boxed{\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{c}}$

Εφαρμόζοντας το βοηθητικό αποτέλεσμα έχουμε

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \quad \|(A + \Delta A)y\| = \|Ay + \Delta Ay\|$$

$$\geq \|Ay\| - \|\Delta A\, y\|$$

$$\geq \|Ay\| - \|\Delta A\| \cdot \|y\|$$

$y = A^{-1}Ay \Rightarrow$
$\|y\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|Ay\|$

$$\Rightarrow \|Ay\| \geq \frac{\|y\|}{\|A^{-1}\|}$$

$$\geq \frac{\|y\|}{\|A^{-1}\|} - \|\Delta A\| \cdot \|y\|$$

$\forall y \in \mathbb{R}^n$

$$\|(A+\Delta A)y\| \geq \underbrace{\frac{1-\|A^{-1}\|\cdot\|\Delta A\|}{\|A^{-1}\|}}_{c>0}\cdot\|y\|$$

Άρα ο $A+\Delta A$ είναι αντιστρέψιμος και

$$\boxed{\|(A+\Delta A)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}}$$

β) $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b \Rightarrow$

$$(A+\Delta A)\Delta x = b-(A+\Delta A)x$$
$$= \cancel{b}-\cancel{Ax}-\Delta A\, x$$

$$\Rightarrow \Delta x = -(A+\Delta A)^{-1}\Delta A\, x$$

$$\Rightarrow \|\Delta x\| \leq \|(A+\Delta A)^{-1}\|\cdot\|\Delta A\|\cdot\|x\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\overbrace{\|A^{-1}\|\cdot\|A\|}^{\kappa(A)}}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|\Delta A\|}\;\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

γ) $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b+\Delta b$

$$\Rightarrow (A+\Delta A)\Delta x = b+\Delta b-(A+\Delta A)x$$
$$= \cancel{b}+\Delta b-\cancel{Ax}-\Delta A\cdot x$$

$$\Rightarrow (A+\Delta A)\Delta x = \Delta b - \Delta A \cdot x$$

$$\Rightarrow \Delta x = (A+\Delta A)^{-1}[\Delta b - \Delta A \cdot x]$$

$$\Rightarrow \|\Delta x\| \leq \|(A+\Delta A)^{-1}\| \left(\|\Delta b + \|\Delta A\| \cdot \|x\| \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|A\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|A\| \, \|x\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{k(A)}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)$$

$\|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

Επαναληπτικές μέθοδοι

$Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρ.

$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ αρχική τιμή

$x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$ ακολουθία προσεγγίσεων της x.

Μέθοδος του Jacobi

" των Gauss-Seidel

Επί πλέον υπόθεση: $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$

$Ax = b \Rightarrow (Ax)_i = b_i$, $i = 1, \dots, n$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

$$\Rightarrow a_{ii} x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i=1,\dots,n$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right], \quad i=1,\dots,n$$

<u>Jacobi:</u> $$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(m)} \right]$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(m)} \\ x_2^{(m)} \\ \vdots \\ x_n^{(m)} \end{pmatrix} \xrightarrow{x^{(m+1)}} \begin{pmatrix} x_1^{(m+1)} \\ x_2^{(m+1)} \end{pmatrix}$$

<u>Gauss-Seidel:</u> $$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(m)} \right]$$

Οι μέθοδοι είναι ιδιαίτερα κατάλληλες στην περίπτωση αραιών πινάκων

Για τη θεωρητική μελέτη είναι καταλληλότερη η εξής μορφή:

$D := \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22} \dots a_{nn})$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Προφανώς $\boxed{A = L + D + U}$

Jacobi: $Dx^{(m+1)} = b - (L+U)x^{(m)}$

$$\boxed{x^{(m+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(m)} + D^{-1}b}$$

Gauss-Seidel: $(L+D)x^{(m+1)} = b - Ux^{(m)}$

$$\boxed{\begin{aligned} x^{(m+1)} = &-(L+D)^{-1}Ux^{(m)} \\ &+ (L+D)^{-1}b \end{aligned}}$$

Γενική επαναληπτική μέθοδος

$Ax=b$

$A = M - N$ με $M, N \in \mathbb{R}^{n,n}$ πίνακες και M αντιστρέψιμος

$Ax=b \iff (M-N)x = b \iff$

$$\boxed{Mx = Nx + b}$$

$x^{(m)} \longrightarrow x^{(m+1)}$

$$\boxed{M x^{(m+1)} = N x^{(m)} + b}$$

Jacobi: $M_J = D, \quad N_J = -(L+U)$

Gauss-Seidel: $M_{GS} = L + D, \quad N_{GS} = -U$

Επιλέγουμε το M έτσι ώστε συστήματα της μορφής $My = z$ να λύνονται εύκολα.

Τί μπορούμε να πούμε για την σύγκλιση των προσεγγίσεων;

Υπόθεση $x^{(m)} \longrightarrow y$ για $m \to \infty$

Ισχυρισμός $y = x$

$$Mx^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b \Rightarrow My = Ny + b \Rightarrow$$

$$My \qquad Ny$$

$$(M-N)y = b \Rightarrow$$

$$\boxed{Ay = b}$$

$$\boxed{y = x}$$

6/5/14

$Ax=b$ A αντιστρέψιμος
$A=M-N$, M "

$Ax=b \Leftrightarrow Mx=Nx+b$

Γενική επαναληπτική μέθοδος:

$Mx^{(m+1)}=Nx^{(m)}+b$ (+)
$m=0,1,2,\ldots$

$x^{(0)}$ αρχική τιμή

Ερώτημα: Πότε συγκλίνει αυτή η μέθοδος;
Δηλ. πότε, για οποιαδήποτε αρχική τιμή $x^{(0)}$, ισχύει
$x^{(m)} \to x$, $m \to \infty$

$$\left.\begin{aligned} Mx^{(m+1)} &= Nx^{(m)}+b \\ Mx &= Nx+b \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$M(x^{(m+1)}-x)=N(x^{(m)}-x) \Rightarrow$$

$$\boxed{x^{(m+1)}-x=M^{-1}N(x^{(m)}-x)}$$

$G:=M^{-1}N$ πίνακας επανάληψης της επαναληπτικής μεθόδου

$$x^{(m+1)}-x=G(x^{(m)}-x)$$
$$\underset{\text{επαγωγικά}}{\Rightarrow} \boxed{x^{(m)}-x=G^{m}(x^{(0)}-x)}$$

Έστω $\|\cdot\|$ μία νόρμα στο $\mathbb{R}^n$ και η αντίστοιχη φυσική νόρμα πινάκων. Τότε

$$(*) \quad \|x^{(m)} - x\| \leq \|G^m\| \, \|x^{(0)} - x\|$$

Για κάθε m και κατάλληλη αρχική τιμή $x^{(0)}$ η $(*)$ ισχύει ως ισότητα.

<u>Συμπέρασμα</u>: Η μέθοδος συγκλίνει, αν και μόνο αν

$$\|G^m\| \to 0, \quad m \to \infty,$$

δηλ.

$$G^m \xrightarrow{\text{πίνακας}} 0, \quad m \to \infty$$

<u>Φασματική ακτίνα πίνακα</u>: $P \in \mathbb{C}^{n,n}$

$\lambda_i(P) \in \mathbb{C}$ οι ιδιοτιμές του P

$$\rho(P) := \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(P)|$$

<u>Λήμμα</u> (Σχέση μεταξύ φυσικής νόρμας και φασματικής ακτίνας πίνακα)

Έστω $\|\cdot\|$ οποιαδήποτε νόρμα στον $\mathbb{C}^n$. Τότε, για κάθε $P \in \mathbb{C}^{n,n}$, ισχύει

$$\rho(P) \leq \|P\|$$

Αντίστοιχα, για κάθε $P \in \mathbb{C}^{n,n}$ και $\varepsilon > 0$, <u>υπάρχει</u> νόρμα $|||\cdot|||$ στον $\mathbb{C}^n$ τ.ω.

$$|||P||| \leq \rho(P) + \varepsilon$$

<u>Απόδειξη</u> (μόνο το πρώτο μέρος)

$\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του P. Έστω $z \in \mathbb{C}^n$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, $Pz = \lambda z$ $(z \neq 0)$
Τότε έχουμε:
$|\lambda|\, \|z\| = \|\lambda z\| = \|Pz\| \leq \|P\| \cdot \|z\|$,
άρα $|\lambda| \cdot \|z\| \leq \|P\| \cdot \|z\|$
$\Rightarrow |\lambda| \leq \|P\|$.

Αφού αυτό ισχύει για οποιαδήποτε ιδιοτιμή, έχουμε

$\rho(P) \leq \|P\|$

<u>Θεώρημα</u> (Ικανές και αναγκαίες συνθήκες σύγκλισης επαναληπτικών μεθόδων)

Έστω x η λύση του γρ. συστήματος $Ax = b$, με $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ αντιστρέψιμο πίνακα. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

α) Η επαναληπτική μέθοδος $\oplus$ συγκλίνει, δηλαδή για κάθε $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ ισχύει
$x^{(m)} \to x$, $m \to \infty$

β) $\rho(G) < 1$, όπου G ο πίνακας επανάληψης της μεθόδου $(G = M^{-1}N)$

γ) Υπάρχει φυσική νόρμα $|||\cdot|||$ τ.ω $|||G||| < 1$

δ) $\lim\limits_{m \to \infty} G^m = \Theta$

Απόδειξη $\alpha) \Rightarrow \beta) \Rightarrow \gamma) \Rightarrow \delta) \Rightarrow \alpha)$

$\alpha) \Rightarrow \beta)$: Έστω ότι $x^{(m)} \to x$, $m \to \infty$.
Τότε $G^{m}(x^{(0)} - x) \to 0$, $m \to \infty$, για οποιοδήποτε $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$
Για $y \in \mathbb{C}^n$ επιλέγουμε $x^{(0)} := y + x$, οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται στη μορφή
$G^m y \to 0$, $m \to \infty$

Έστω λ ιδιοτιμή του G και z αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα
Επομένως
$\lambda^m z \to 0$, $m \to \infty$. Άρα $\|\lambda^m z\| \to 0$, $m \to \infty$,
οπότε $|\lambda|^m \underbrace{\|z\|}_{\neq 0} \to 0$, $m \to \infty$

$\Rightarrow |\lambda| < 1$

Συμπέρασμα: $|\lambda_i(G)| < 1$, $i = 1, \ldots, n$.

οπότε $\rho(G) < 1$.

$\beta) \Rightarrow \gamma)$: $\rho(G) < 1 \Rightarrow$ Υπάρχει $\varepsilon > 0$

τ.ω. $\rho(G) + \varepsilon < 1$ $\left(\mathring{\varepsilon} < 1 - \rho(G)\right)$

$\rho(G) \quad 1$

Σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα, υπάρχει φυσική νόρμα $|||\cdot|||$ τ.ω.

$$|||G||| \leq \underbrace{\rho(G) + \varepsilon}_{<1}$$

$\gamma) \Rightarrow \delta)$: $|||G^m||| \le \underbrace{|||G|||\cdot|||G|||\cdots|||G|||}_{m \text{ φορές}}$

$= |||G|||^m \to 0, \quad m \to \infty$

γιατί $|||G||| < 1$

$\delta) \Rightarrow \alpha)$

$$x^{(m)} - x = G^m (x^{(0)} - x)$$

$$\Rightarrow \|x^{(m)} - x\| \le \underbrace{\|G^m\|}_{\xrightarrow{m\to\infty} 0} \|x^{(0)} - x\|$$

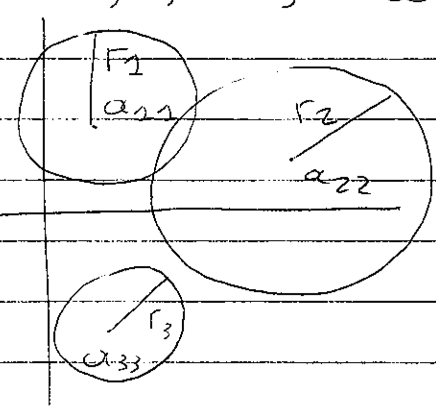
$$\Rightarrow \|x^{(m)} - x\| \to 0, \quad m \to \infty$$

$$\Rightarrow x^{(m)} \to x, \quad m \to \infty$$

Λήμμα (Ανισότητα του Gerschgorin)

Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n,n}$ πίνακας και $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του. Τότε υπάρχει $s \in \{1, \dots, n\}$ τω

$$|a_{ss} - \lambda| \le \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne s}}^{n} |a_{sj}|}_{r_s} \quad (**)$$



Απόδειξη Έστω $z \in \mathbb{C}^n$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Τότε

$$Az = \lambda z$$

Επομένως,

$$(Az)_i = \lambda z_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

δηλ $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j = \lambda z_i$

$$\Rightarrow (\lambda - a_{ii}) z_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} z_j$$

$$\Rightarrow |a_{ii} - \lambda| \cdot |z_i| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \cdot |z_j|$$

Έστω s τ.ω. $|z_s| = \|z\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |z_j|$

Τότε, για $i = s$, έχουμε

$$|a_{ss} - \lambda| \cdot |z_s| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{n} |a_{sj}| \underbrace{|z_j|}_{\leq |z_s|}$$

$$\Rightarrow |a_{ss} - \lambda| \cdot \cancel{|z_s|} \leq \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{n} |a_{sj}| \right) \cancel{|z_s|}$$

$A \in \mathbb{C}^{n,n}$ αυστηρά υπεραχική διαγώνιο

$$\boxed{|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n}$$

Ισχυρισμός: A ~~αα~~ αυστηρά κυρ. διαγώνιο
=> A αντιστρέψιμος.

($Az=0 \Rightarrow z=0$) αντιστρέψιμος <=> A αντιστρέψιμος αν και μόνο αν το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του

Έστω ότι το μηδέν είναι ιδιοτιμή του A. Τότε, σύμφωνα με την (∗∗)

$$|\alpha_{ss}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{n} |\alpha_{sj}|$$, άτοπο

Πρόταση (Σύγκλιση των ~~μεθ~~ μεθόδων του Jacobi και των Gauss-Seidel για πίνακες με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο

Έστω A ένας πίνακας με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο. Τότε:

α) Οι πίνακες επανάληψης $G_J = -D^{-1}(L+U)$ και $G_{GS} = -(L+D)^{-1}U$ των μεθόδων του Jacobi και των Gauss-Seidel, αντίστοιχα, ικανοποιούν τις ανισότητες

$$\|G_J\|_\infty < 1, \quad \|G_{GS}\|_\infty < 1$$

β) Οι μέθοδοι του Jacobi και των Gauss Seidel συγκλίνουν για συστήματα με πίνακα συντελεστών A.

Απόδειξη:

α) Θέτουμε

$$C_1 := \max_{1 \le i \le n} \left[\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \right]$$

Προφανώς $C_1 < 1$

Ισχυρισμός $\| G_J \|_\infty = C_1$

$$G_J = -D^{-1}(L + U)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|G_J\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|$$

$$= \max_{1 \le i \le n} \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| \right)$$

$$= C_1 < 1$$

Επαγωγή:

$$i=1: \quad u_1 = -\frac{1}{a_{11}} \sum_{j=2}^{n} a_{1j} y_j \Rightarrow$$

$$|u_1| \le \frac{1}{|a_{11}|} \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| \underbrace{|y_j|}_{\le \|y\|_\infty}$$

$$\Rightarrow |u_1| \le \underbrace{\left(\frac{1}{|a_{11}|} \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| \right)}_{\le C_1} \|y\|_\infty$$

Έστω ότι η (++) ισχύει για $1, \dots, i-1$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για το i. Έχουμε

$$|u_i| \le \frac{1}{|a_{ii}|} \left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \underbrace{|u_j|}_{\le C_1 \|y\|_\infty \le \|y\|_\infty} + \right.$$

επαγωγική υπόθεση

$C<1$

$$\left. \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \underbrace{|y_j|}_{\le \|y\|_\infty} \right)$$

7/5/14

<u>Άσκηση 3.31</u>

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\|A\| = 2.5$;

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$$

$$= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2 - 4 = (\lambda+1)^2 - 4$$

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 = 4 \Leftrightarrow$$
$$\lambda + 1 = \pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$$

Άρα
$$\rho(A) = 3$$

Παρατηρούμε ότι $\rho(A) > \|A\|$, οπότε τέτοια φυσική νόρμα δεν υπάρχει

<u>Άσκηση 3.32</u>

α) $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$\|A\|_{max} = \max_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

α) $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, $\|A\|_{max}=2$

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\2&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-4$$

$$=(\lambda-1)^2-4$$

$$p(\lambda)=0 \iff (\lambda-1)^2=4 \iff$$

$$\lambda-1=\pm 2 \iff \begin{cases}\lambda_1=3\\ \lambda_2=-1\end{cases}$$

$$\rho(A)=3$$

$$\rho(A)>\|A\|_{max}$$

$\Rightarrow$ $\|\cdot\|_{max}$ δεν είναι φυσική νόρμα

$\|I_n\|_E=\sqrt{n}\neq 1$ για $n\geq 2$

$$\|A\|=\sup_{\substack{x\in R^n\\ x\neq 0}}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$\Rightarrow$ $\|\cdot\|_E$ δεν είναι φυσική νόρμα

β) $\forall x\in\mathbb{R}^n$ $\|Ax\|_2\leq\|A\|_E\,\|x\|_2$

(δηλ. $\|A\|_2\leq\|A\|_E$)

β) $\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \left((Ax)_i \right)^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2}$$

$$\underset{CS}{\leq} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2 \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (x_j)^2}_{\|x\|_2^2}$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_2^2 \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2 \right)}_{\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij})^2} \|x\|_2^2$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_2 \leq \|A\|_E \|x\|_2$$

Άσκηση 3.36

$\|\cdot\|$ νόρμα στον $\mathbb{R}^n$

" " $\mathbb{R}^{n,n}$

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ $\boxed{\|A\| < 1}$

ΝΔΟ: $I_n - A$ αντιστρέψιμος

$(I_n - A)x = 0 \Rightarrow x = Ax \Rightarrow$

$\|x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

Έστω $x \neq 0$ Τότε $1 \leq \|A\|$ ↯

Συμπεραίνουμε $x = 0$

$\Rightarrow I_n - A$ αντιστρέψιμος

$$\frac{1}{1+\|A\|} \leq \|(I_n - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

$$1 = \|(I_n - A)^{-1}(I_n - A)\|$$

$$\leq \|(I_n - A)^{-1}\| \underbrace{\|(I_n - A)\|}_{\leq \underbrace{\|I_n\|}_{1} + \|A\|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\|A\|} \leq \|(I_n - A)^{-1}\|$$

$$1 = \|(I_n - A)^{-1}(I_n - A)\|$$

$$= \|(I_n - A)^{-1} - (I_n - A)^{-1}A\|$$

$$\geq \|(I_n - A)^{-1}\| - \underbrace{\|(I_n - A)^{-1}A\|}_{\leq \|(I_n - A)^{-1}\| \, \|A\|}$$

$$\geq \|(I_n - A)^{-1}\| - \|(I_n - A)^{-1}\| \cdot \|A\|$$

$$= \|(I_n - A)^{-1}\| \left(1 - \|A\|\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\|A\|} \geq \|(I_n - A)^{-1}\|$$

Άσκηση 3.64 $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 1 & 1 & \frac{7}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ΝΔΟ: Jacobi συγκλίνει

Gauss-Seidel γενικά αποκλίνει

Jacobi:

$$G_J = -\underbrace{D^{-1}}_{= I_3}(L+U)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & \frac{7}{2} \\ -1 & 0 & -\frac{7}{4} \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(G_J - \lambda I_3)$$

$$= \dots = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right)$$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm \frac{1}{2}$

$$\rho(G_J) = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ η μέθοδος συγκλίνει

Gauss-Seidel:

$$G_{GS} = -(L+D)^{-1}U = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

πράξεις

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{21}{4} \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \frac{7}{4}$

$\rho(G_{GS}) = \frac{7}{4} > 1$ απόκλιση

Άσκηση 3.65

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_J = -D^{-1}(L+U)$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$p(\lambda) = \det(G_J - \lambda I_3) = \dots = -\lambda^3 + \frac{11}{6}\lambda - \frac{7}{6}$

$p(-1) = 1 - \frac{11}{6} - \frac{7}{6} = -2 < 0$

$\lim_{\lambda \to -\infty} p(\lambda) = +\infty$

$\Rightarrow$ υπάρχει ρίζα του p στο $(-\infty, -1)$

Συμπέρασμα $\rho(G_J) > 1 \Rightarrow$ η μέθοδος αποκλίνει

$G_{GS} = -(L + D)^{-1} U = \dots$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = \frac{1}{2}, \ \lambda_3 = \frac{1}{3}$

$\rho(G_{GS}) = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ η μέθοδος συγκλίνει!