3ο Κεφάλαιο

3. Γραμμικά Συστήματα

Δεδομένα: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ nxn πίνακας
$b \in \mathbb{R}^n$ διάνυσμα

Ζητούμενο: $x \in \mathbb{R}^n$ τ.ω. $Ax=b$

Θα μας απασχολήσουν τα θέματα:

α) Αριθμητικές μέθοδοι για την προσέγγιση του x.
- Κόστος (απαιτούμενες πράξεις και απαιτούμενη μνήμη)
- Ευστάθεια των μεθόδων

β) Κατάσταση γραμμικών συστημάτων

3.1 Γενικά για γραμμικά συστήματα

Δεδομένα: Συντελεστές $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i=1,2,\dots,n$.
Δεύτερα μέλη $b_i \in \mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$.

Ζητούμενα: $x_1,\dots,x_n$ τ.ω.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\} (*)$$

Με

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

και $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, το $(*)$ γράφεται στη μορφή $Ax=b$.

Θα ασχοληθούμε μόνο με γρ. συστήματα που έχουν ακριβώς μια λύση.

Καθε μια από τις ακόλουθες συνθηκες είναι ικανή και αναγκαία για να έχει το $Ax=b$ ακριβως μια λύση:

i. Ο A είναι αντιστρέψιμος, ο A^{-1}.

ii. $\det A \neq 0$

iii. $Ax=0 \Rightarrow x=0$ (και όχι το αντίστροφο)

iv. Οι στήλες (ή οι γραμμές) του A είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$

Τρόποι Επίλυσης:

α) Κανόνας του Crammer

$A=(a^1 a^2 \dots a^n)$ $\quad a^i$ i-οστη στήλη του A

$A_i(a^1 a^2 \dots a^{i-1} b a^{i+1} \dots a^n)$

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i=1,\dots,n$$

β) Με τον A^{-1}: Υπολογίζουμε τον A^{-1} και $\boxed{x=A^{-1}\cdot b}$

Οι τρόποι αυτοί έχουν μόνο θεωρητική και όχι πρακτική αξία.

α) Crammer: Αναπτύσσοντας ως προς τη στήλη j του A έχουμε

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$, όπου $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$ ο πίνακας

που προκύπτει αν διαγράψουμε τη γραμμή i και τη στήλη j του A.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι η $\det A$ είναι ένα άθροισμα $n!$ όρων και ο κάθε όρος έχει n παράγοντες

Απαιτούμενοι Πολλαπλασιασμοί: $n!(n-1)$

$n+1$ ορίζουσες: $(n+1)!(n-1)$ πολλαπλασιασμοί.

β) Ο A^{-1} χρειάζεται πολύ σπάνια στην πράξη.

Πώς υπολογίζεται ο A^{-1};

Ισχυρισμός: Έστω $u^1, \ldots, u^n$ τ.ω. $Au^i = e^i$, $i = 1, \ldots, n$ με e^i το διάνυσμα με i-οστή συνιστώσα μονάδα και όλες τις άλλες μηδέν.

$$e^i_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , j = i \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(Kronecker)

Τότε $A^{-1} = (u^1 \, u^2 \ldots u^n)$.

Πράγματι:

$$A \cdot (u^1 \, u^2 \ldots u^n) = (Au^1 \; Au^2 \ldots Au^n)$$
$$= (e^1 \, e^2 \ldots e^n) = I_n$$

άρα $(u^1 \, u^2 \ldots u^n) = A^{-1}$

Δύο μεγάλες κατηγορίες γραμμικών συστημάτων (πινάκων) 28/3/13

α) Πυκνοί (ή αποθηκεύσιμοι) πίνακες: Έχουν στοιχεία a_{ij} γενικά διάφορα του μηδενός

β) Αραιοί (ή σποραδικοί) πίνακες: Έχουν πολλά μηδενικά στοιχεία που αν τα εκμεταλλευτούμε αποκομίζουμε υπολογιστικά οφέλη

Μέγεθος Πινάκων: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

$n<100$ μικρή
$100 \le n \le 1000$ μεσαία
$n \ge 1000$ μεγάλη

Στην πράξη λύνουμε συστήματα με πυκνούς πίνακες μέχρι μεσαίου μεγέθους, ενώ με αραιούς πίνακες έως και μεγάλου μεγέθους

Δύο μεγάλες κατηγορίες μεθόδων

α) άμεσες:
Δίνουν τη λύση με πεπερασμένο πλήθος πράξεων (αν υποθέσουμε ότι οι πράξεις γίνονται ακριβώς). Εφαρμόζονται κυρίως για πυκνούς πίνακες

β) επαναληπτικές
Δίνουν ακολουθία προσεγγίσεων της λύσης. Εφαρμόζονται κυρίως για αραιούς πίνακες

Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Έστω $U=(u_{ij})\in\mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος και άνω τριγωνικός, δηλαδή τ.ω. $u_{ij}=0$ για $i>j$

$\Rightarrow \det U = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}$

$\Rightarrow$ (U αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow u_{ii}\neq 0,\ i=1,\dots,n$)

Έστω $y\in\mathbb{R}^n$. Το γραμμικό σύστημα $Ux=y$ δηλαδή

$$\left.\begin{array}{l} u_{11}x_1+u_{12}x_2+\dots+u_{1n}x_n=y_1 \\ \quad u_{22}x_2+\dots+u_{2n}x_n=y_2 \\ \qquad \ddots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad u_{nn}x_n=y_n \end{array}\right\}$$

Λύνονται εύκολα με οπισθοδρόμηση

Λύνουμε την τελευταία εξίσωση ως προς x_n, αντικαθιστούμε στην προτελευταία και λύνουμε ως προς x_{n-1}, κτλ...

Αλγόριθμος της οπισθοδρόμησης

$$x_n=\frac{y_n}{u_{nn}}, \quad \text{για } k=n-1,n-2,\dots,1.$$

$$x_k=\frac{1}{u_{kk}}\left[y_k-\sum_{j=k+1}^{n}u_{kj}x_j\right]$$

$$\sum_{j=\cancel{1}k}^{n}u_{kj}x_j=y_k \Leftrightarrow u_{kk}x_k=y_k-\sum_{j=k+1}^{n}u_{kj}x_j$$

Απαιτούμενες Πράξεις:
Διαιρέσεις: n
Πολλαπλασιασμοί, $1+2+\dots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$
προσθέσεις:

Θέσεις μνήμης: $\frac{n^2}{2}+O(n)$ για τα u_{ij} και y_i

(Τα x_i αποθηκεύονται στις θέσεις των y_i)

Ιδέα στη Μέθοδο απαλοιφής του Gauss:
Με κατάλληλους μετασχηματισμούς γραμμών (εναλλαγή δύο γραμμών ή πρόσθεση κατά μέλη ενός πολλαπλασίου μιας εξίσωσης σε μία άλλη και αντικατάσταση της τελευταίας με το αποτέλεσμα) μετατρέπουμε το $Ax=b$ σε ένα ισοδύναμο σύστημα $Ux=y$ με άνω τριγωνικό πίνακα U.
Δύο στάδια: Τριγωνοποίηση
Οπισθοδρόμηση
Γενική Περιγραφή
$Ax=b$, $A\in\mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος
Θέτουμε $A^{(1)}=(a_{ij}^{(1)})=A$, $b^{(1)}=\begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)}\end{pmatrix}=b$ και γράφουμε

το $Ax=b$ ως $A^{(1)}x=b^{(1)}$.
1. Τριγωνοποίηση
1ο βήμα Υπόθεση $a_{11}^{(1)}\neq 0$
Πολλαπλασιαστές: $m_{i1}:=\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$, $i=2,\dots,n$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή επί m_{i1}, αφαιρούμε από την i-οστή γραμμή και αντικαθιστούμε την i-οστή γραμμή με το αποτέλεσμα, για $i=2,\dots,n$

Έτσι, μετά το πρώτο βήμα παίρνουμε το σύστημα $A^{(2)}x=b^{(2)}$
με:
$$A^{(2)}=\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad b^{(2)}=\begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

με $a_{ij}^{(2)}=a_{ij}^{(1)}-m_{i1}a_{1j}^{(1)}$, $i,j=2,\dots,n$
$b_i^{(2)}=b_i^{(1)}-m_{i1}b_1^{(1)}$, $i=2,\dots,n$

<u>Βήμα r</u> $1\le r\le n-1$
Ξεκινάμε από το σύστημα $A^{(r)}x=b^{(r)}$
$$A^{(r)}=\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} a_{rr}^{(r)} & \cdots & a_{rn}^{(r)} \\ \vdots & & \\ a_{nr}^{(r)} & \cdots & a_{nn}^{(r)} \end{matrix}} \\ 0 & & \underbrace{\qquad\qquad}_{\tilde{A}^{(r)}} \end{pmatrix}, \quad b^{(r)}=\begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_r^{(r)} \\ b_{r+1}^{(r)} \\ b_n^{(r)} \end{pmatrix}$$

Θέτουμε $\tilde{A}^{(r)}=\begin{pmatrix} a_{rr}^{(r)} & \cdots & a_{rn}^{(r)} \\ \vdots & & \\ a_{nr}^{(r)} & \cdots & a_{nn}^{(r)} \end{pmatrix}$

Έχουμε $\underbrace{\det A^{(r)}}_{\neq 0}=a_{11}^{(1)}a_{22}^{(2)}\cdots a_{r-1\,r-1}^{(r-1)}\det\tilde{A}^{(r)}$

$\Rightarrow \det\tilde{A}^{(r)}\neq 0$
<u>Υπόθεση</u>: $a_{rr}^{(r)}\neq 0$ (μπορεί να επιτευχθεί)

<u>Πολλαπλασιαστές</u> $m_{ir}=\dfrac{a_{ir}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}}$, $i=r+1,\dots,n$

Πολλαπλασιάζουμε τη γραμμή r επί m_{ir}, αφαιρούμε από τη γραμμή i, και αντικαθιστούμε τη γραμμή i με το αποτέλεσμα για $i=r+1,\dots,n$. Το αποτέλεσμα είναι
$A^{(r+1)}x=b^{(r+1)}$, με τις πρώτες r γραμμές του A ίδιες με του $A^{(r)}$, τις πρώτες r συνιστώσες του $b^{(r+1)}$ ίδιες με του

$b^{(r)}$, αντίστοιχα και

$$a_{ij}^{(r+1)} = a_{ij}^{(r)} - m_{ir}a_{rj}^{(r)}, \quad i,j = r+1,\dots,n,$$

$$b_i^{(r+1)} = b_i^{(r)} - m_{ir}b_r^{(r)}, \quad i = r+1,\dots,n$$

Ύστερα από $n-1$ βήματα παίρνουμε το σύστημα
$A^{(n)}x = b^{(n)}$, με $A^{(n)}$ άνω τριγωνικό.

ii Οπισθοδρόμηση:
Λύνουμε το $A^{(n)}x = b^{(n)}$

<u>Απαιτούμενες πράξεις και μνήμη</u>

Μετράμε μόνο πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις.

<u>Τριγωνοποίηση</u>:

<u>1º βήμα</u>: Για τον υπολογισμό των:
m_{i1}, $i=2,\dots n$, απαιτούνται $n-1$ πράξεις
Για τον υπολογισμό των:
$a_{ij}^{(2)}$, $i,j=2,\dots,n$ χρειάζονται $(n-1)^2$ πράξεις.

<u>Βήμα r</u>: πολλαπλασιαστές: $n-r$ πράξεις
$a_{ij}^{(r+1)}$, $i,j=r+1,\dots,n$: $(n-r)^2$ πράξεις

Συνολικά για τους πολλαπλασιαστές και τον πίνακα A:

$$\sum_{r=1}^{n-1}\left[(n-r)+(n-r)^2\right] = \frac{n^3-n}{3} \text{ Πράξεις} \qquad \frac{n^3}{3}$$

<u>Για το b</u>: $\sum_{r=1}^{n-1}(n-r) = 1+2+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}$

- A: $\frac{n^3}{3}-\frac{n}{3}$
- <u>Οπισθοδρόμηση</u>: $\frac{n^2}{2}+O(n)$
- b: $\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}$

Παράδειγμα: $n=20$

Έστω ότι ο υπολογιστής κάνει $10^6/sec$

Gauss: $\frac{16}{3} \cdot 10^3$ sec

Crammer: Για τους $21 \cdot 20! \cdot 19$ πολλαπλασιασμούς απαιτούνται $\approx 3 \cdot 10^5$ αιώνες

Απαιτούμενη μνήμη:

Για τον A: n^2 θέσεις

Για το b: n θέσεις

Οι πολλαπλασιαστές m_{ij} $(i>j)$ αποθηκεύονται στις θέσεις (i,j) (όπου υπάρχει το στοιχείο a_{ij}), δηλαδή συνολικά στο κάτω μέρος (κάτω από τη διαγώνιο του A)

1/4/13

Υπολογισμός Ορίζουσας

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος

$\det A = ;$

Απαλοιφή Gauss

$A \rightsquigarrow A^{(n)}$

$\det A = (-1)^m \det A^{(n)}$, όπου m το πλήθος των εναλλαγών γραμμών κατά την τριγωνοποίηση

$\det A = (-1)^m \det A^{(n)} = (-1)^m a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \dots a_{nn}^{(n)}$

Πράξεις: $\frac{n^3}{3} + O(n)$

Μέθοδος Crammer

Πράξεις: $(n+1)\left(\frac{n^3}{3} + O(n)\right) = \frac{n^4}{3} + \dots$

άρα είναι ασύμφορη!

Οδήγηση

Οδηγοί: $a_{ii}^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$

Αναμένουμε προβλήματα ευστάθειας αν οι οδηγοί έχουν πολύ μικρή απόλυτη τιμή

Παράδειγμα:

$$\left.\begin{aligned} \boxed{10^{-4}} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 1x_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

$t = 3$, $\beta = 10$, $L = -20$, $U = 20$, στρογγύλευση

Ακριβής λύση: $x_1 = 1{,}0001\dots$

$x_2 = 0{,}9998$

Απαλοιφή Gauss:

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1}{10^{-4}} = 10^4$$

χάνουμε η πληροφορία από τη δεύτερη εξίσωση

$$a_{22}^{(2)} = fl(a_{22}^{(1)} - m_{21} \cdot a_{12}^{(1)}) = fl(1 - 10^4 \cdot 1) = fl(-9999) = -10000 = -10^4$$

$$b_2^{(2)} = fl(b_2^{(1)} - m_{21} b_1^{(1)}) = fl(2 - 10^4) = -10^4$$

$$\left.\begin{aligned} 10^{-4}x_1 + x_2 &= 1 \\ -10^4 x_2 &= -10^4 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Εναλλακτικά:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 10^{-4}x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Ο υπολογιστης μας, τότε, δίνει:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$, πολύ καλή προσέγγιση!

Συμπερασμα: Πρέπει να φροντίζουμε να μην προκυπτουν πολύ μικροι οδηγοι ("ασαφιες")

Απαλοιφή του Gauss με μερική οδηγηση (ή οδηγηση κατά γραμμές):

Στο βήμα r της απαλοιφής του Gauss εξετάζουμε τα στοιχεία $a_{kr}^{(r)}$, $k = r, r+1, \dots n$, βρισκουμε ένα στοιχειο με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή και με εναλλαγή γραμμών το φέρνουμε στη θέση του οδηγού

Επι πλέον κοστος: $\frac{n^2}{2} + O(n)$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 10^4 x_2 &= 10^4 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

$\frac{|a_{11}|}{|a_{12}|} = 10^{-4}$ $\quad \frac{|a_{21}|}{|a_{22}|} = 1$

Ολική οδηγηση (ή οδηγηση κατά γραμμές και στήλες):

Στο βήμα r εξετάζουμε τα στοιχεία $(a_{kl}^{(r)})$, $k, l = r, \dots, n$

παίρνουμε ένα με μέγιστη απόλυτη τιμή και με αλλαγές γραμμών-στηλών το φέρνουμε στη θέση του οδηγού.

Επι πλέον κοστος: $O(n^3)$

Παρατηρήσεις

- Η απαλοιφή του Gauss χωρίς οδήγηση θεωρείται ασταθής αλγόριθμος. Υπάρχουν κατηγορίες συστημάτων (π.χ. αν ο A είναι θετικά ορισμένος, δηλ $\forall\ x \in \mathbb{R}^n, x\neq 0$, ισχύει $x^T A x > 0$) που έχει αποδειχθεί ότι είναι ευσταθής. Η μέθοδος χρησιμοποιείται μόνο για τέτοια συστήματα.
- Η ολική οδήγηση θεωρείται ευσταθής αλγόριθμος. Χρησιμοποιείται σπάνια, γιατί διπλασιάζει το κόστος της απαλοιφής
- Η πιθανότητα να είναι η μερική οδήγηση ασταθής είναι πολύ μικρή. Αυτή η στρατηγική χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην πράξη, γιατί είναι κατά κανόνα ευσταθής και αυξάνει μόνο λίγο το κόστος της απαλοιφής

Ο αλγόριθμος της απαλοιφής στην πράξη

Υλοποιείται σε δύο στάδια.

1ο στάδιο: Έχει ως είσοδο τα στοιχεία του πίνακα A, εκτελεί τους υπολογισμούς που αφορούν τον A (τριγωνοποίηση), και δίνει ως τελικό αποτέλεσμα έναν πίνακα που στο άνω τρίγωνο του A έχει τα στοιχεία του $A^{(n)}$, και στο κάτω τρίγωνο τους πολλαπλασιαστές. Επίσης καταγράφει τις τυχόν εναλλαγές γραμμών. Πράξεις: $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$, Μνήμη: $n^2 + O(n)$
(DECOMP)

2ο στάδιο: Έχει ως είσοδο το αποτέλεσμα του πρώτου σταδίου και το b, και εκτελεί τους υπολογισμούς που αφορούν το b, και εν συνεχεία με οπισθοδρόμηση υπολογίζει το x.
Πράξεις: $\frac{n^2}{2} + O(n)$, Μνήμη: n θέσεις (SOLVE)

DECOMP (μερική οδήγηση)

Παράδειγμα: Υπολογισμός του A^{-1}

$Au^i = e^i, \; i=1,\dots,n$

$A^{-1} = (u^1, u^2, \dots u^n)$

Κόστος: $\frac{n^3}{3} + (n \cdot n^2 + \dots) = \frac{4n^3}{3} + O(n^2)$ (γίνεται n^3 τελικά λόγω των πολλών μηδενικών e^i)

Η ανάλυση LU $\quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ αντιστρέψιμος

Το πρώτο στάδιο της απαλοιφής Gauss, σε γλώσσα πινάκων, μπορεί να θεωρηθεί και ως εξής: Γράφουμε τον A ως γινόμενο, $A = P^{-1}LU$, με:

- P είναι ένας πίνακας μετάθεσης. Προκύπτει από τον I_n με εναλλαγές γραμμών (αποθηκεύεται σε ένα διάνυσμα)
- L είναι κάτω τριγωνικός, με μονάδες στη διαγώνιο, και κάτω από τη διαγώνιο έχει τους πολλαπλασιαστές.
- U είναι άνω τριγωνικός, το τελικό προϊόν της τριγωνοποίησης.

$A = P^{-1}LU$

$Ax = b \Rightarrow PAx = Pb$

$\Rightarrow \boxed{LUx = Pb}$ Έστω $Ux = y$

SOLVE {
- Λύνουμε το σύστημα $Ly = Pb$
- Λύνουμε το σύστημα $Ux = y$

1η Περίπτωση: Υποθέτουμε ότι στην τριγωνοποίηση δεν χρειάζονται εναλλαγές γραμμών.

Θα αποδείξουμε τότε ότι $\boxed{A = LU}$

Θεωρώ τον πίνακα M_1,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -m_{21} & \ddots & & \\ -m_{31} & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ -m_{n1} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε $M_1 \cdot A = A^{(2)}$. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Στο βήμα r της απαλοιφής, θεωρώ τον πίνακα M_r, που έχει μονάδες στη διαγώνιο, τους αντίθετους των πολλαπλασιαστών κάτω από τα διαγώνιο στοιχείο στη στήλη r και μηδενικά παντού αλλού, δηλαδή

$$(M_r)_{ij} = \begin{cases} 1 & , i=j \\ -m_{ir} & , i=r+1,\dots,n \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Τότε: $M_{n-1}M_{n-2}\dots M_1 A = A^{(n)}$

Οι πίνακες M_r είναι αντιστρέψιμοι ($\det M_r = 1$), οπότε:

$$A = M_1^{-1}\dots M_{n-2}^{-1}M_{n-1}^{-1}\underbrace{A^{(n)}}_{U}$$

$$\begin{pmatrix} B^{-1}A^{-1}AB = I \\ A^{-1}B^{-1}AB \neq I \end{pmatrix}$$

1º: $(M_r^{-1})_{ij} = \begin{cases} 1 & , i=j \\ m_{ir} & , i=r+1,\dots,n \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

2º: $M_i^{-1}\cdot M_j^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ m_{i+1,i} & & \\ m_{n,i} & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ m_{j+1,i} & & \\ m_{n,i} & \dots & 1 \end{pmatrix}$

$j<i$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & m_{i+1,i} & \ddots & \\ & \vdots & m_{j+1,j} & \\ & m_{n,i} & m_{nj} & \dots\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ m_{31} & m_{32} & \ddots & \\ \vdots & & & \\ m_{n1} & m_{n2} & & 1 \end{pmatrix} = L$$

Άσκηση 3.1 2/4/13

α) $U, W \in \mathbb{R}^{n,n}$ <u>άνω</u> τριγωνικός

$\Rightarrow UW$ " τριγωνικός

β) $U \in \mathbb{R}^{n,n}$ <u>άνω</u> τριγωνικός και αντιστρέψιμος

$\Rightarrow U^{-1}$ <u>άνω</u> τριγωνικός.

<u>Απόδειξη</u>

α) $(UW)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} w_{kj}$ Επειδή $u_{i1} = u_{i2} = \dots = u_{i,i-1} = 0$

$w_{j+1,j} = \dots = w_{nj} = 0$

$= \sum_{k=i}^{j} u_{ik} w_{kj}$

Άρα $(UW)_{ij} = \sum_{k=i}^{j} u_{ik} w_{kj}$

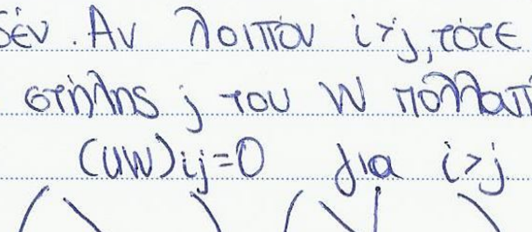
Για $i > j$, προφανώς $(UW)_{ij} = 0$

$$(UW)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} w_{kj}$$

$$= \sum_{k=i}^{n} u_{ik} w_{kj} = u_{ij}\underbrace{w_{ij}}_{0} + u_{i,i+1}\underbrace{w_{i+1,j}}_{0} + \dots + u_{in}\underbrace{w_{nj}}_{0} = 0$$

$u_{i1} = u_{i2} = \dots = u_{i,i-1} = 0$ για $i > j$

<u>Με άλλα λόγια</u>: Το στοιχείο $(UW)_{ij}$ είναι το εσωτερικό γινόμενο της i γραμμής του U με τη j στήλη του W. Μόνο κάποια από τα πρώτα j στοιχεία της στήλης j του W μπορεί να μην είναι μηδέν. Αυτά πολλαπλασιάζονται με τα πρώτα j στοιχεία της γραμμής i του U.
Όμως τα πρώτα $i-1$ στοιχεία της γραμμής i του U είναι μηδέν. Αν λοιπόν $i > j$, τότε όλα τα μη μηδενικά στοιχεία της στήλης j του W πολλαπλασιάζονται με μηδέν.
Άρα $(UW)_{ij} = 0$ για $i > j$



$U^{-1} = (x^1, x^2, \dots x^n)$, x^i είναι η i στήλη του U^{-1}.
Ο U^{-1} είναι άνω τριγωνικός, αν και μόνο αν $x^i_{i+1} = \dots = x^i_n = 0$
για $i = 1, \dots, n$
Όμως $Ux^i = e^i$, $i = 1, \dots, n$.
δηλαδή

$u_{11}x^i_1 + \dots + u_{1n}x^i_n = 0$

$\vdots$

$$\left.\begin{aligned} u_{ii}x^i_i + u_{in}x^i_n &= 1 \\ \underset{\neq 0}{u_{i+1,i+1}} x^i_{i+1} + \dots + u_{i+1,n} \cdot x^i_n &= 0 \\ &\vdots \\ \underset{\neq 0}{u_{nn}} x^i_n &= 0 \end{aligned}\right\} (*)$$

$\Rightarrow x^i_n = 0 \Rightarrow x^i_{n-1} = 0 \Rightarrow \dots \; x^i_{i+1} = 0$
(λύνουμε με οπισθοδρόμηση, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι τα δεξιά μέλη είναι μηδέν, και ότι $u_{ij} \neq 0$, $j = i+1, \dots, n$)
Με άλλα λόγια το (*) είναι ένα ομογενές γραμμικό σύστημα με αντιστρέψιμο πίνακα (γιατί είναι άνω τριγωνικός και έχει μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία), οπότε έχει μόνο τη μηδενική λύση

Άσκηση 3.3

$A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$, A αντιστρέψιμος, $b \in \mathbb{R}^n$

- $A^{-4}b$
- $A^{-1}BA^{-1}b$

$x = A^{-4}b \Rightarrow \boxed{A^4x = b}$

$A(\underbrace{A^3x}_{y}) = b$, $Ay = b$ και ξέρω $A^3x = y$

$A^3x = y \Rightarrow A(\underbrace{A^2x}_{z}) = y$, $Az = y$

$A^2x = z \Rightarrow A(\underbrace{Ax}_{u}) = z$

$Ay = b$
$Az = y$
$Au = z$
$Ax = u$

Λύνουμε τέσσερα γραμμικά συστήματα με τον ίδιο πίνακα A και δεξιά μέλη, b, y, z, και u.

$\cdot\ x = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} b \Rightarrow$

$A \cdot x = B \cdot (A^{-1} \cdot b) = y \quad , \quad Ay = b$

$\Rightarrow \boxed{Ax = By}$

Λύνουμε δύο συστήματα με τον ίδιο πίνακα, και ενδιάμεσα πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα B με το y.

Άσκηση 3.6

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & 1 & & \\ & & a_{i+1,i} & \ddots & \\ & & a_{n,i} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ν.δ.ο.} \cdot A_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -a_{i+1,i} & \ddots & \\ & & -a_{n,i} & & 1 \end{pmatrix}$$

Έστω: $AB = A + B - I_n + \underbrace{(A-I_n)(B-I_n)}_{AB - A - B + I_n}$

$$A_i^{-1} A_i = \underbrace{\underbrace{A_i^{-1} + A_i}_{2I_n} - I_n}_{I_n} + \underbrace{(A_i^{-1} - I_n)(A_i - I_n)}_{=0}$$

Ανάλυση LU 4/4/13

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος. Τότε $A = P^{-1}LU$ με

- P πίνακας μετάθεσης
- L κάτω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο.
(κάτω από τη διαγώνιο τα στοιχεία του L είναι οι αντίστοιχοι πολλαπλασιαστές)
- U άνω τριγωνικός (το τελικό προϊόν της απαλοιφής)

1η Περίπτωση: Κατά την απαλοιφή Gauss δε γίνονται εναλλαγές γραμμών. Τότε $A = LU$.

Παραδείγματα

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Απαλοιφή Gauss: $m_{21} = \frac{1}{2}$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

Απαλοιφή Gauss: $m_{21} = \frac{1}{2}, \; m_{31} = 1$

$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $a_{22}^{(2)} = 0$. Άρα ο A δε γράφεται στη μορφή $A = LU$, με L και U με τις επιθυμητές ιδιότητες.

2η Περίπτωση: Κατά την απαλοιφή Gauss γίνονται εναλλαγές γραμμών (είτε για να πάρουμε μη μηδενικούς οδηγούς είτε για μερική οδήγηση)

Η γραμμή την οποία στο βήμα i φέρνουμε στη θέση του οδηγού (δηλαδή την εναλλάσσαμε με τη γραμμή i)

ούτε αλλάζει πλέον θέση ούτε τα στοιχεία της αλλάζουν στη συνέχεια της απαλοιφής. Επομένως, υπάρχει μία μετάθεση των γραμμών του πίνακα A που αν την κάναμε πριν από το πρώτο βήμα της απαλοιφής θα οδηγούσε σε έναν πίνακα A' για τον οποίο η απαλοιφή Gauss μπορεί να γίνει χωρίς εναλλαγές γραμμών. Τότε σύμφωνα με την πρώτη περίπτωση,

- $A' = LU$, με L, και U με τις επιθυμητές ιδιότητες.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $A' = P \cdot A$, με πίνακα μετάθεσης P.

Μετάθεση: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$

Αντίστοιχος πίνακας μετάθεσης: P που προκύπτει από τον I_n. Η i_k γραμμή του P είναι η k γραμμή του I_n, για $k=1,\dots,n$

Παράδειγμα $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

Στο $P \cdot A$ οδηγούμαστε κάνοντας με τον ίδιο τρόπο που από τον I_n οδηγούμαστε στον P

Άρα, υπάρχει πίνακας μετάθεσης P τ.ω. $A' = P \cdot A$.
Συμπέρασμα: $P \cdot A = LU \Rightarrow A = P^{-1} \cdot LU$.
(θα ασχοληθούμε με το παράδειγμα 2)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = B$$

Απαλοιφή Gauss: $m_{21} = 1$, $m_{31} = 1/2$

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$ άνω τριγωνικός

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Επαλήθευση: $LU = \dots = B = P \cdot A$

Κατάσταση γραμμικών συστημάτων

Παράδειγμα:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{.913} & .659 \\ .780 & .563 \end{pmatrix}}_{= A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .254 \\ .217 \end{pmatrix}$$

Λύση $\rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Απαλοιφή Gauss: $B = 10$, $t = 3$, αποκοπή

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} -.443 \\ 1 \end{pmatrix}$$, πολύ κακή προσέγγιση

$$A=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .253 \\ .218 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y=\begin{pmatrix} 1.223 \\ -1.694 \end{pmatrix}$$ Το σύστημα έχει καλή κατάσταση!

- $\det A = -10^{-6}$

$\tilde{A} = 10^4 \cdot A$

$\det \tilde{A} = -100$

<u>Συμπέρασμα</u>: Από το μέγεθος της ορίζουσας του A <u>δεν</u> μπορούμε να συμπεράνουμε κάτι για την κατάσταση γραμμικών συστημάτων $Ax=b$.

Νόρμες διανυσμάτων και πινάκων

Γενίκευση της έννοιας της απόλυτης τιμής για διανύσματα και πίνακες.

- <u>Νόρμες διανυσμάτων</u>

<u>Ορισμός</u> (Νόρμα): Έστω X ένας γραμμικός χώρος στο $\mathbb{R}$ ή στο $\mathbb{C}$, και $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, αντίστοιχα. Μια απεικόνιση, $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$, λέγεται <u>νόρμα</u> αν ισχύει:

(N1) $x \in X$ $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$.

(N2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\forall x \in X$ $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(N3) $\forall x,y \in X$ $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα)

<u>Παρατηρήσεις</u>:

i) $\forall x \in X$ $\|x\| \ge 0$

$$0 = \|0\| = \|x-x\| = \|x+(-x)\| \le \|x\| + \underbrace{\|-x\|}_{=\|x\|} = 2\|x\|$$

ii) $\forall\, x,y \in X \quad \|x-y\| \geq \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big|$

τριγωνική ανισότητα προς τα κάτω

$\|x\| = \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$

$\Rightarrow \quad \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$

αντίστοιχα

$\underbrace{\|y\| - \|x\|}_{\shortparallel} \leq \|y-x\| = \|x-y\|$

$= -(\|x\| - \|y\|)$

Παραδείγματα

1. $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$, $\|x\| := |x|$

$(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$, $\|z\| := |z|$

2. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \rightarrow$ (ℓ_1 -νόρμα)

$x = (x_1, x_2, \dots x_n)$

$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

$= \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

(N_1): $x \in \mathbb{R} \quad \|x_1\| = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \Leftrightarrow |x_i| = 0,\ i = 1, \dots, n$

$\Leftrightarrow x_i = 0,\ i = 1, \dots, n \Leftrightarrow x = 0$

(N_2): $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$

$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda| \cdot |x_i| = |\lambda| \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda| \cdot \|x\|_1$

(N_3): $\forall\, x,y \in \mathbb{R}^n \quad \|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)$

$= \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

3. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow$ (άπειρο νόρμα ή νόρμα μεγίστου)

$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

4. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \rightarrow$ (ℓ_2-νόρμα ή ευκλείδια νόρμα)

$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$

Νόρμες διανυσμάτων 8/4/13

Παραδείγματα

4. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$

$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$

(N1), (N2): είναι τετριμμένες

(N3): τριγωνική ανισότητα

Εσωτερικό γινόμενο: $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$

$(x,y)_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Τότε ισχύει: $\|x\|_2 = \sqrt{(x,x)_2}$

Ανισότητα των Cauchy-Schwarz:

$\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n \quad |(x,y)_2| \le \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$

1η Περίπτωση: $y=0$ είναι τετριμμένη.

2η Περίπτωση: $y \neq 0$, Για $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$0 \le (x+\lambda y, x+\lambda y)_2 = (x,x)_2 + (x,\lambda y)_2 + (\lambda y, x)_2 + (\lambda y, \lambda y)_2$

$= \|x\|^2 + 2\lambda (x,y)_2 + \lambda^2 \|y\|_2^2$ $\quad \neq 0$

διακρίνουσα

$\Rightarrow \Delta \le 0 \quad , \Delta = 4(x,y)_2^2 - 4\|x\|_2^2 \|y\|_2^2 \le 0$

$\Rightarrow (x,y)_2^2 \le \|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2 \Rightarrow |(x,y)_2| \le \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$

Τριγωνική ανισότητα:

Για $x, y \in \mathbb{R}^n$

$\|x+y\|_2^2 = (x+y, x+y)_2 = \|x\|_2^2 + 2(x,y)_2 + \|y\|_2^2$

$\le \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$

ανισότητα Cauchy-Schwarz $\Rightarrow \|x+y\|_2 \le \|x\|_2 + \|y\|_2$

5. $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ $\quad p = 1, \infty, 2$

$z \in \mathbb{C}^n \quad \|z\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |z_i| \;,\quad \|z\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |z_i|$

$\|z\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)^{1/2}$

Εσωτερικό Γινόμενο:

$(x,y)_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

6. $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$

$\|f\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x)|$

(N_1): $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \max_{a \le x \le b} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \;\forall x \in [a,b] \Leftrightarrow f = 0$

(N_2): $\lambda \in \mathbb{R}, f \in C[a,b]$: $\|\lambda f\|_\infty = \max_{a \le x \le b} \underbrace{|\lambda f(x)|}_{|\lambda| \cdot |f(x)|} =$

$= |\lambda| \max_{a \le x \le b} |f(x)| = |\lambda| \, \|f\|_\infty$

(N_3): $f, \varphi \in C[a,b]$:

$\|f + \varphi\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x) + \varphi(x)| = |f(\tilde{x}) + \varphi(\tilde{x})|$, κατάλληλο $\tilde{x}$

$\le |f(\tilde{x})| + |\varphi(\tilde{x})| \le \|f\|_\infty + \|\varphi\|_\infty$

<u>Ορισμός</u> (Ισοδύναμες νόρμες) Έστω X ένας γραμμικός χώρος. Δύο νόρμες $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ στον X λέγονται <u>ισοδύναμες</u> (<u>ή συγκρίσιμες</u>), αν υπάρχουν <u>θετικές</u> σταθερές M, m τ.ω. $\forall x \in X$

$$m\|x\| \le \|x\|' \le M\|x\|$$

(τα M, m είναι ανεξάρτητα από τις νόρμες)

(οπότε $\forall x \in X \quad \frac{1}{M}\|x\|' \le \|x\| \le \frac{1}{m}\|x\|'$)

Λήμμα (Ισοδυναμία νόρμας στον $\mathbb{R}^n$ με τη νόρμα μεγίστου)
Κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμη με τη νόρμα μεγίστου.

Απόδειξη: $x \in \mathbb{R}^n$, $x=(x_1,\dots,x_n)$
Έστω $\{e^1,e^2,\dots,e^n\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$
Τότε $x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + \dots + x_n e^n$

$$\Rightarrow \|x\| = \Big\|\sum_{i=1}^{n} x_i e^i\Big\| \le \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\|x_i e^i\|} = \sum_{i=1}^{n} \overset{\le \|x\|_\infty}{|x_i|}\, \|e^i\| \le \|x\|_\infty \cdot \overset{M}{\overbrace{\sum_{i=1}^{n} \|e^i\|}}$$

τριγωνική ανισότητα

Πρόταση (Ισοδυναμία νορμών στον $\mathbb{R}^n$)
Όλες οι νόρμες στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμες μεταξύ τους.

Απόδειξη: Έστω $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$
Τότε σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα, υπάρχουν $M, m, M', m' > 0$ τ.ω.

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\quad m\|x\|_\infty \le \|x\| \le M\|x\|_\infty$

$\quad\quad$ " $\quad m'\|x\|_\infty \le \|x\|' \le M'\|x\|_\infty$

Άρα, για $x \in \mathbb{R}^n$, έχουμε

$$\|x\| < M\|x\|_\infty \le M\frac{1}{m'}\|x\|' = \frac{M}{m'}\|x\|'$$

και $$\|x\| \ge m\|x\|_\infty \ge m\frac{1}{M'}\|x\|' = \frac{m}{M'}\|x\|'$$

Ορισμός (Σύγκλιση ακολουθίας)
Λέμε ότι μια ακολουθία $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ συγκλίνει <u>ως προς μια νόρμα $\|\cdot\|$ του X</u>, αν υπάρχει $x \in X$ (το όριο της ακολουθίας ως προς $\|\cdot\|$) τ.ω.
$\|x^{(n)} - x\| \to 0$, $n \to \infty$.

Ειδικά στον $\mathbb{R}^n$, μια ακολουθία $(x^{(m)})_m \subset \mathbb{R}^n$ (λόγω της ισοδυναμίας των νορμών) συγκλίνει σε οποιαδήποτε νόρμα), αν και μόνο αν, υπάρχει $x \in \mathbb{R}$, τ.ω.
$x_i^{(m)} \to x_i$, $m \to \infty$, για $i = 1, 2, \dots, n$.
(σύγκλιση κατά συνιστώσα)

<u>Ορισμός</u> (Πλήρης χώρος)
Ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται <u>πλήρης</u>, αν κάθε ακολουθία Cauchy στον X ως προς τη $\|\cdot\|$ συγκλίνει ως προς $\|\cdot\|$, για κάθε ακολουθία $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ ισχύει:
$$(\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, N\in\mathbb{N}\ \forall\, n,m\geq N\ \ \|x^{(n)}-x^{(m)}\|<\varepsilon)$$
$$\Rightarrow \exists\, x\in X\ \ \|x^{(n)}-x\| \to 0,\ n\to\infty.$$
<u>Θεώρημα</u>: Ο $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι πλήρης, ως προς οποιαδήποτε νόρμα $\|\cdot\|$.

<u>Νόρμες πινάκων</u>
Μια απεικόνιση $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$ τ.ω να ικανοποιεί τις $(N1), (N2), (N3)$ και επιπλέον: $\forall\, A,B\in\mathbb{R}^{n,n}\ \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, λέγεται <u>νόρμα πινάκων</u>.
Θα ασχοληθούμε μόνο με μια ειδική κατηγορία, <u>τις φυσικές νόρμες</u>.

<u>Παρατήρηση</u> $\|\cdot\|$ νόρμα στον $\mathbb{R}^n$
Ισοδυναμία με τη νόρμα μεγίστου: $M, m>0$ τ.ω. $\forall\, x\in\mathbb{R}^n$
$m\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M\|x\|_\infty$.
Έστω $A\in\mathbb{R}^{n,n}$. Τότε, για $x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0$,
$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \frac{M\|Ax\|_\infty}{m\|x\|_\infty}$$
$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \frac{M}{m}\cdot\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{M}{m}\,\frac{\max\limits_{1\leq i\leq n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|}{\|x\|_\infty} \leq \frac{M}{m}\,\frac{\max\limits_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\underbrace{|x_j|}_{\leq\|x\|_\infty}}{\|x\|_\infty}$$
$$\left((Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) \qquad \leq \frac{M}{m}\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| =: C \text{ ανεξ του } x$$

<u>Ορισμός</u> (φυσική νόρμα πινάκων)
Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{n,n}\to\mathbb{R}$,
$\|A\| := \sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, λέγεται <u>φυσική νόρμα πινάκων</u>
(η νόρμα παράγεται από τη νόρμα $\|\cdot\|$ του $\mathbb{R}^n$)

Ισχυρισμός: $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\| \le \|A\|\cdot\|x\|$

- για $x=0$ τετριμμένο
- για $x \neq 0$: $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \|A\|$

Κάθε φυσική νόρμα πινάκων είναι νόρμα πινάκων.

- Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τη $\|A\|$;
- $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\|Ax\| \le c_1\|x\|$, $c_1>0$ ανεξ του x

  $\Rightarrow \|A\| \le c_1$ τετριμμένο.
- Έστω $y \in \mathbb{R}^n, y\neq 0$ τ.ω. $\|Ay\| \ge c_2\|y\|$

Τότε $\|A\| \ge c_2$

Ιδέα Αποδεικνύουμε ότι $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\|Ax\| \le c_1\|x\|$ (με όσο το δυνατόν μικρότερη σταθερά μπορούμε) και για κατάλληλο $y\neq 0$ αποδεικνύουμε ότι $\|Ay\| \ge c_1\|y\|$, οπότε $\|A\| = c_1$

$A=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$

Παραδείγματα

1. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

   νόρμα του αθροίσματος γραμμών

2. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$

   $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

   νόρμα αθροίσματος στηλών.

Άσκηση 3.6 (συνέχεια) 9/4/13

$$A_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -a_{i+1,i} & \ddots & \\ & \vdots & & \\ & -a_{ni} & & 1 \end{pmatrix}, \quad A,B \in \mathbb{R}^{n,n}, \text{ Τότε } AB = A+B-I_n+(A-I_n)(B-I_n)$$

Για $i \le j$. Τότε

γιατι η γραμμη i του δεύτερου πινακα είναι μηδέν

$$(A_i-I_n)(A_j-I_n) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & a_{i+1,i} & \ddots & \\ & a_{ni} & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & a_{j+1,j} & \ddots & \\ & a_{nj} & & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Συμπερασμα: Για $i \le j$ ισχυει: $A_iA_j = A_i + A_j - I_n$

Ειδικοτερα: 1) $\boxed{j=i}$

$$A_iA_i^{-1} = \underbrace{A_i + A_i^{-1}}_{2I_n} - I_n = I_n \quad \checkmark$$

2) $\boxed{j>i}$

$$A_iA_j = A_i + A_j - I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & a_{i+1,i} & a_{j+1,j} & \ddots \\ & a_{ni} & a_{nj} & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 3.7

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρεψιμος

Υποθεση: $A = LU$, ΝΔΟ: $A = \tilde{L}\tilde{U} \Rightarrow L = \tilde{L}$, $U = \tilde{U}$

$$A = P^{-1} \cdot LU \Leftrightarrow PA = LU$$

$(\underbrace{\det A}_{\neq 0} = \underbrace{\det L}_{1} \cdot \underbrace{\det U}_{-} \Rightarrow \det U \neq 0$ άρα ο U αντιστρεψιμος$)$

$$LU = \tilde{L}\tilde{U} \Rightarrow \tilde{L}^{-1} \cdot L \cdot U = \tilde{U}$$

$$\Rightarrow \tilde{L}^{-1} \cdot L \underbrace{(U \cdot U^{-1})}_{I_n} = \tilde{U} \cdot U^{-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\tilde{L}^{-1} \cdot L}_{\text{κατω τριγωνικος}} = \underbrace{\tilde{U}U^{-1}}_{\text{άνω τριγωνικος}} \quad \Rightarrow \tilde{L}^{-1} \cdot L = \tilde{U}U^{-1} = D = \text{diag}(d_{11}, \ldots, d_{nn})$$

$$\tilde{L}^{-1} \cdot L = D \Rightarrow L = \tilde{L} \cdot D \Rightarrow \underbrace{L_{ii}}_{1} = \underbrace{\tilde{L}_{ii}}_{1} d_{ii}$$

$$\Rightarrow d_{ii} = 1 \Rightarrow D = I_n$$

Άρα:

$\tilde{L}^{-1} \cdot L = I_n \Rightarrow L = \tilde{L} \cdot I_n = \tilde{L}$

$\tilde{U} \cdot U^{-1} = I_n \Rightarrow \tilde{U} = I_n \cdot U = U$

Άσκηση 3.10

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\delta_1 = a_{11}, \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots \delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$

(δ_i λέγονται κύριες ορίζουσες του πίνακα)

Αν $\delta_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n-1$ τότε $A = LU$.

Το πρώτο βήμα της τριγωνοποίησης του A γίνεται χωρίς πρόβλημα, αφού $a_{11} \neq 0$

Έστω ότι γίνονται $i-1$ βήματα $\leq n-2$ της τριγωνοποίησης χωρίς πρόβλημα. Τότε:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \dots & a_{1,i}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} \dots & a_{2,i}^{(2)} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{ii}^{(i)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & & a_{ii} \end{pmatrix} = \delta_i \neq 0.$$

Άρα $a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \dots a_{ii}^{(i)} = \delta_i \neq 0 \Rightarrow a_{ii}^{(i)} \neq 0$.

Επομένως, γίνεται χωρίς πρόβλημα και το βήμα i της τριγωνοποίησης

Άσκηση 3.11

$A=(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο.

δηλαδή

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad , i=1,\dots,n$$

Ν.Δ.Ο: A αντιστρέψιμος

$A = LU$

$$\delta_i = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix} \neq 0, \quad i=1,\dots,n$$

↑ πίνακας με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο

Νόρμες Πινάκων

11/4/13

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$

(N1), (N2), (N3) και $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$

Φυσικές νόρμες

$\|\cdot\|$ νόρμα στον $\mathbb{R}^n$

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$\boxed{\|A\| := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$$

1. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

2. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

3. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$

$\lambda \in \mathbb{C}$ λέγεται ιδιοτιμή ενός πίνακα A αν

$\exists\ x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0,\ Ax = \lambda x$

$$Ax = \lambda x \Rightarrow (A - \lambda I_n)\underset{x \neq 0}{\underset{\uparrow}{x}} = 0$$

$\Rightarrow \underline{\det|A - \lambda I_n| = 0}$

πολυώνυμο βαθμού $= n$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ τότε ορίζω

$\rho(A) := \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$, φασματική ακτίνα.

Ισχύει:

$\|A\|_2 = (\rho(A^T A))^{1/2}$

4. $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$

$\|A\| = (\rho(A^* A))^{1/2}$

$A^* = (\bar{a}_{ji})$ (... ανάστροφα και συζ/ής)

Δείκτης Κατάστασης Πίνακα

(*) $Ax=b$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος

Τι μπορούμε να πούμε για την κατάσταση του (*)?

Έστω $\|\cdot\|$ νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και η αντίστοιχη φυσική νόρμα πίνακων

$$\left.\begin{array}{l} Ax=b \\ A(x+\Delta x)=b+\Delta b \end{array}\right\}$$

ιναι οι μεταβολές

$A(x+\Delta x)=b+\Delta b \Rightarrow$

$\cancel{Ax}+A\Delta x=\cancel{b}+\Delta b \Rightarrow A\Delta x=\Delta b \Rightarrow \Delta x=A^{-1}\cdot\Delta b \Rightarrow$

$\|\Delta x\|=\|A^{-1}\cdot\Delta b\| \Rightarrow$

$\boxed{\|\Delta x\| \le \|A^{-1}\|\,\|\Delta b\|}$

<u>Υποθέτω</u>: $b \neq 0$ (το $x\neq 0$ επειδή ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος)

Τότε

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\cdot\|\Delta b\|}{\frac{\|b\|}{\|A\|}} \qquad \left(\begin{array}{l} b=Ax \Rightarrow \|b\| \le \|A\|\cdot\|x\| \Rightarrow \\ \|x\| \ge \frac{\|b\|}{\|A\|} \end{array}\right)$$

Συμπέρασμα: $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \underbrace{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|}_{\kappa(A)}\cdot\dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$

$\kappa(A)$ είναι ο δείκτης κατάστασης του A

$1=\|I_n\|=\|A\cdot A^{-1}\| \le \|A\|\cdot\|A^{-1}\|=\kappa(A)$

$\kappa(A) >> 1$: κακή κατάσταση

$\kappa(A)$ όχι πολύ μεγαλύτερο του 1: καλή κατάσταση

Θεώρημα (εκτίμηση της σχετικής μεταβολής λύσεων γραμμικών συστημάτων)
Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και η αντίστοιχη φυσική νόρμα στον $\mathbb{R}^{n,n}$. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος, $\Delta A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b, \Delta b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$. Τότε, αν $\kappa(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$, έχουμε.

i) $\left.\begin{array}{l} Ax=b \\ A(x+\Delta x)=b+\Delta b \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \cdot \dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$

ii) Αν $\|A^{-1}\|\|\Delta A\| < 1$, τότε

$$\left.\begin{array}{l} Ax=b \\ (A+\Delta A)(x+\Delta x)=b \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1-\|A^{-1}\|\|\Delta A\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

iii) Αν $\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$, τότε

$$\left.\begin{array}{l} Ax=b \\ (A+\Delta A)(x+\Delta x)=b+\Delta b. \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1-\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right)$$

Το i) και το ii) είναι ειδικές περιπτώσεις του iii)

Απόδειξη

i) Το αποδείξαμε ήδη

ii) Το βοηθητικό αποτέλεσμα: $B \in \mathbb{R}^{n,n}$

$\exists\, c>0\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad \|Bx\| \overset{(*)}{\geq} c\|x\|$

Τότε ο B είναι αντιστρέψιμος και $\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$.

$Bx=0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} x=0$, άρα υπάρχει ο B^{-1}

$\forall\, y \in \mathbb{R}^n$ (*) με $x=B^{-1}y$

$c\|B^{-1}y\| \leq \|B \cdot B^{-1}y\|$

$\Rightarrow \forall\, y \in \mathbb{R}$

$\|B^{-1}y\| \leq \frac{1}{c}\|y\| \Rightarrow \|B^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$ ∎

$(A+\Delta A)(x+\Delta x)=b \Rightarrow$

$(A+\Delta A) \cdot \Delta x = \cancel{b} - \cancel{Ax} - \Delta A \cdot x$

$\Rightarrow (A+\Delta A) \cdot \Delta x = -\Delta A \cdot x$

Τώρα, για $y \in \mathbb{R}^n$ $\quad \|(A+\Delta A)y\| \geq \|Ay\| - \underbrace{\|\Delta A y\|}_{\leq \|\Delta A\| \cdot \|y\|}$

$\geq \|Ay\| - \|\Delta A\| \cdot \|y\|$

$y = A^{-1}Ay \Rightarrow \|y\| = \|A^{-1} \cdot Ay\|$

$\leq \|A^{-1}\| \cdot \|Ay\| \Rightarrow \|Ay\| \geq \frac{\|y\|}{}$

Συνέχεια από την προηγούμενη σελ. $\|A^{-1}\|$

$$\|(A+\Delta A)y\| \geq \frac{\|y\|}{\|A^{-1}\|} - \|\Delta A\| \cdot \|y\|$$

$$= \frac{1}{\|A^{-1}\|} (1 - \|\Delta A\|) \cdot \|y\|$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\|A^{-1}\|} \underbrace{(1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|)}_{>0}}_{\to c>0} \|y\|$$

Άρα, σύμφωνα με το βοηθητικό αποτέλεσμα ο $A+\Delta A$ είναι αντιστρέψιμος, και

$$\boxed{\|(A+\Delta A)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|}}$$

$(A+\Delta A)\Delta x = -\Delta A \cdot x \Rightarrow$

$\Delta x = -(A+\Delta A)^{-1} \cdot \Delta A x \Rightarrow \|\Delta x\| \leq \|(A+\Delta A)^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| \cdot \|x\|$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|(A+\Delta A)^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|$$

$$\leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|A\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

$$= \frac{\kappa(A)}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

iii) $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b+\Delta b \Rightarrow$

$(A+\Delta A)\Delta x = \cancel{b} + \Delta b - A\cancel{x} - \Delta A x$

$\Rightarrow \Delta x = (A+\Delta A)^{-1}(\Delta b - \Delta A x)$

$\Rightarrow \|\Delta x\| \le \|(A+\Delta A)^{-1}\| \cdot (\|\Delta b\| + \|\Delta A\| \cdot \|x\|)$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \cdot \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|x\|} + \|\Delta A\|\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|A\|}{1-\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \cdot \left(\frac{\|\Delta b\|}{\underbrace{\|A\| \cdot \|x\|}_{\le \|b\|}} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)$$

$(b = Ax \Rightarrow \|b\| \le \|A\| \cdot \|x\|)$

Άρα $$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\kappa(A)}{1-\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \cdot \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)$$

<u>Επαναληπτικές μέθοδοι</u>

$Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος

$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ αρχική προσέγγιση.

$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$

Μέθοδος του Jacobi

" των Gauss-Seidel

<u>Υπόθεση</u>: $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$

$Ax = b \Rightarrow (Ax)_i = b_i$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1, \ldots, n$

$$\Rightarrow a_{ii}x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right], \quad i = 1, \ldots, n$$

Jacobi:

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}\right], i=1,\dots,n$$

Gauss - Seidel:

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}\right], i=1,\dots,n$$

15/4/13

$Ax=b$

A αντιστρέψιμος

Υπόθεση: $a_{ii} \neq 0$, $i=1,\dots,n$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right], i=1,\dots,n$$

Jacobi:

$$x_i^{(m+1)} := \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}\right]$$

Gauss - Seidel:

$$x_i^{(m+1)} := \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}\right]$$

$i=1,\dots,n$

Μελέτη;

$$L := \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \mathrm{diag}(a_{11},\dots,a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{L+D+U=A}$$

Jacobi: $\Delta x^{(m+1)} = b - L\cdot x^{(m)} - U\cdot x^{(m)}$

$\Delta x^{(m+1)} = b - (L+U)x^{(m)}$

$x^{(m+1)} = -\Delta^{-1}(L+U)x^{(m)} + \Delta^{-1}\cdot b$

Gauss - Seidel:

$\Delta x^{(m+1)} + Lx^{(m+1)} = b - Ux^{(m)}$

$\Rightarrow (L+\Delta)x^{m+1} = b - Ux^{(m)}$

$\Rightarrow x^{(m+1)} = -(L+\Delta)^{-1}\cdot Ux^{(m)} + (L+\Delta)^{-1}b$

Γενική Επαναληπτική μέθοδος: $A = M - N$

$Ax = b \Leftrightarrow (M-N)x = b \Leftrightarrow Mx - Nx = b \Leftrightarrow$

$Mx = Nx + b$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{αντιστρέψιμος}}}{M}\, x^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b$

Jacobi: $M_J = \Delta$, $N_J = L+U$

Gauss - Seidel: $M_{GS} = L+\Delta$, $N_{GS} = U$

$Mx = Nx + b$

$Mx^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b$

Υπόθεση: $x^{(m)} \to y$, $m \to \infty$

Ισχυρισμός: $y = x$.

Απ. $\quad Mx^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b$

$\quad My = Ny + b$

$\Rightarrow \underbrace{(M-N)}_{A}y = b \Rightarrow y = b$

$$\left.\begin{array}{l} Mx = Nx + b \\ Mx^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$M(x^{(m+1)} - x) = N(x^{(m)} - x) \Rightarrow x^{(m+1)} - x = \underbrace{M^{-1}N}_{\substack{\shortparallel \\ G}}(x^{(m)} - x)$$

G → πινακας επανάληψης της μεθοδου.

Jacobi: $G_J = -D^{-1}(L+U)$

Gauss-Seidel: $G_{GS} = -(L+D)^{-1}U$

$$x^{(m+1)} - x = G(x^{(m)} - x)$$

$$\Rightarrow x^{(m)} - x = G^m(x^{(0)} - x), \ m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \|x^{(m)} - x\| = \|G^m(x^{(0)} - x)\|$$

$$\leq \|G^m\| \cdot \underbrace{\|x^{(0)} - x\|}$$

η μέθοδος συγκλίνει (για οποιαδήποτε αρχική τιμή αν $G^m \to 0, m \to \infty$

A, $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ ιδιοτιμες του A

$\rho(A) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)|$ φασματική ακτίνα του A.

<u>Λήμμα</u> (Σχέση φυσικής νόρμας και φασματικής ακτίνας πίνακα)

Εστω $\|\cdot\|$ νόρμα στον $\mathbb{C}^n$. Συμβολίζουμε επίσης με $\|\cdot\|$ την αντίστοιχη φυσική νόρμα $n \times n$ πινάκων. Τότε, για κάθε $P \in \mathbb{C}^{n,n}$ ισχύει $\rho(P) \leq \|P\|$.

Αντίστροφα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσική νόρμα $|||\cdot|||$ τ.ω. $|||P||| \leq \rho(P) + \varepsilon$.

<u>Απόδειξη</u> (του πρώτου μέρους)

Εστω λ ιδιοτιμή του P και z αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

$Pz = \lambda z$

Τότε $\underbrace{\|\lambda z\|}_{\substack{\shortparallel \\ |\lambda| \cdot \|z\|}} = \|Pz\| \leq \|P\| \cdot \|z\| \Rightarrow |\lambda| \leq \|P\|$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε ιδιοτιμή του P συμπεραίνουμε ότι
$\rho(P) \leq \|P\|$.

$Ax=b$, $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ αντιστρέψιμος

(*) $M x^{(m+1)} = N x^{(m)} + b$

M αντιστρέψιμος ($A = M - N$)

<u>Θεώρημα</u> (Ικανές και αναγκαίες συνθήκες σύγκλισης επαναληπτικών μεθόδων)

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

α) Η επαναληπτική μέθοδος (*) συγκλίνει, δηλ. για κάθε $x^{(0)} \in \mathbb{C}^m$ ισχύει $x^{(m)} \to x$, $m \to \infty$

β) $\rho(G) < 1$, με $G := M^{-1}N$

γ) <u>Υπάρχει</u> φυσική νόρμα $|||\cdot|||$ τ.ω. $|||G||| < 1$

δ) $G^m \to 0$, $m \to \infty$.

<u>Απόδειξη</u> α) $\Rightarrow$ β) $\Rightarrow$ γ) $\Rightarrow$ δ) $\Rightarrow$ α)

<u>α) $\Rightarrow$ β)</u>: Έστω $x^{(m)} \to x$, $m \to \infty$

Τότε από την $x^{(m)} - x = G^m (x^{(0)} - x)$, έπεται ότι $G^{(m)} (x^{(0)} - x) \to 0$, $m \to \infty$. Για τυχαίο $y \in \mathbb{C}^n$ επιλέγουμε $x^{(0)} := x + y$. Άρα $G^m y \to 0$, $m \to \infty$.

Έστω λ ιδιοτιμή του G και z αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Τότε $Gz = \lambda z$, οπότε $G^m z = \lambda^m \cdot z$

Τώρα $G^m z \to 0 \Leftrightarrow \lambda^m \cdot z \to 0$, $m \to \infty$

ή $|\lambda|^m \|z\| \to 0$, $m \to \infty$

ή $|\lambda|^m \to 0$, $m \to \infty$

Επομένως, $|\lambda| < 1$.

Αυτό ισχύει για όλες τις ιδιοτιμές οπότε $\rho(G) < 1$

<u>β) $\Rightarrow$ γ)</u>: Έστω $\varepsilon > 0$ τ.ω. $\rho(G) + \varepsilon < 1$

Σύμφωνα με το Λήμμα υπάρχει φυσική νόρμα: $|||\cdot|||$ τ.ω. $|||G||| < \rho(G) + \varepsilon$

Άρα $|||G||| < 1$

$\underline{\gamma) \Rightarrow \delta)}$ $|||G^m||| \leq \underbrace{|||G||| \cdot |||G||| \cdots |||G|||}_{m \text{ φορές}}$

$= |||G|||^m \to 0 \ , m \to \infty$

$\Rightarrow G^m \to 0, m \to \infty$

$\underline{\delta) \Rightarrow \alpha)}$: $x^{(m)} - x = G^m (x^{(0)} - x)$

$\Rightarrow \|x^{(m)} - x\| \leq \|G^m\| \cdot \|x^{(0)} - x\| \to 0 \ , m \to \infty$

Για την κατανόηση του γ)

$G = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1(G) = \lambda_2(G) = 0$.

$\rho(G) = 0$

$\|G\|_\infty = 2$

$\|G\|_1 = 2$ Το ότι και οι τρεις είναι ≥ 1 δε σημαίνει ότι

$\|G\|_2 = 2$ δε συγκλίνει

A: αυστηρά κυριαρχική διαγ.

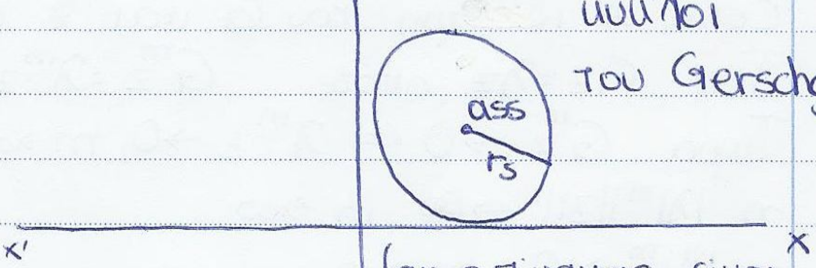
$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \ , i = 1, \ldots, n.$$

<u>Λήμμα</u> (Ανισότητα του Gerschgorin)

Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας πίνακας και λ μια ιδιοτιμή του A. Τότε υπάρχει $s \in \{1, \ldots, n\}$ τ.ω.

$$|a_{ss} - \lambda| \leq \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{n} |a_{sj}|}_{r_s}$$

κύκλοι του Gerschgorin



(Αν ο πίνακας είναι πραγματικός τα κέντρα είναι στο x'x)

<u>Απόδειξη</u>

$Az = \lambda z \ , z \neq 0$

$(Az)_i = \lambda z_i \ , i = 1, \ldots, n$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j = \lambda \cdot z_i \Rightarrow a_{ii} z_i = \lambda z_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} z_i$

$\Rightarrow (a_{ii} - \lambda) z_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} z_i \Rightarrow$

$$|a_{ii}-\lambda| \cdot |z_i| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}||z_j|$$

Επιλέγουμε ένα $s \in \{1,\dots,n\}$ τ.ω. $|z_j| = \|z\|_\infty$

Τότε $|a_{ss}-\lambda| \cdot |z_s| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} |a_{sj}| \cdot |z_j|$

$$|a_{ss}-\lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} |a_{sj}| \underbrace{\frac{|z_j|}{|z_s|}}_{\leq 1} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} |a_{sj}|$$

16/4/13

Άσκηση 3.11

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο.

ΝΔΟ · A αντιστρέψιμος

· $A = LU$.

$$Ax=0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \Rightarrow a_{ii}x_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j \Rightarrow$$

$$\boxed{|a_{ii}| \cdot |x_i| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}||x_j|} \quad (*)$$

Έστω s τ.ω. $|x_s| = \max_j |x_j| = \|x\|_\infty$

Τότε η $(*)$ για $i=s$, δίνει.

$$|a_{ss}| \cdot |x_s| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} |a_{sj}| \underbrace{|x_j|}_{\leq |x_s|}$$

$$\Rightarrow |a_{ss}| \cdot |x_s| \leq |x_s| \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} |a_{sj}|$$

Υπόθεση: $x \neq 0$, τότε $|x_s| \neq 0$, συνεπώς

$|a_{ss}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{sj}|$, Άτοπο.

Συμπέρασμα: $x=0$ δηλαδή A αντιστρ.

Άσκηση 3.23.

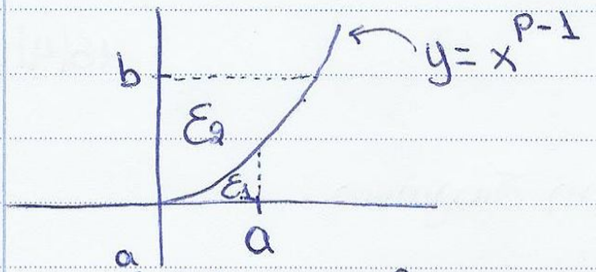
α) $1<p,q<\infty$ τ.ω. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $a,b\geq 0$.

ΝΔΟ: $ab\leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$

ανισότητα του Young

$p=2, q=2$

$$ab\leq \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2} \Leftrightarrow (a-b)^2\leq 0.$$



$E_1=\int_0^a x^{p-1}dx=\frac{a^p}{p}$

$E_2=\int_0^b y^{\frac{1}{p-1}}dy$

Ισχυρισμός: $\frac{1}{p-1}=q-1 \Leftrightarrow pq-p-q+\cancel{1}=\cancel{1}$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{q}-\frac{1}{p}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Άρα $E_2=\int_0^b y^{\frac{1}{p-1}}dy=\int_0^b y^{q-1}dy=\frac{b^q}{q}$

β) $1 \le p < \infty$.

$\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$

Έστω $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ΝΔΟ: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \|x\|_p \cdot \|y\|_q$

ανισότητα του Hölder
$p = 2 \rightsquigarrow q = 2$ ανισότητα του Hölder συμπίπτει με την ανισότητα CS

<u>1η Περίπτωση</u>: $p = 1 \rightsquigarrow q = \infty$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|y\|_\infty = \|x\|_1 \cdot \|y\|_\infty$$

Έστω $x \neq 0$ και $y \neq 0$

Υποθέτουμε: $1 < p < \infty$

<u>2η Περίπτωση</u> $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$

$$|x_i y_i| \le \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q} \quad \text{(Young)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \frac{1}{p} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}_{\|x\|_p = 1} + \frac{1}{q} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q}_{= 1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

<u>3η Περίπτωση</u>: $1 < p < \infty$

Θέτω $\tilde{x} = \frac{x}{\|x\|_p}$, $\tilde{y} = \frac{y}{\|y\|_q}$ (οπότε $\|\tilde{x}\|_p = \|\tilde{y}\|_q = 1$)

Άρα σύμφωνα με τη δεύτερη περίπτωση

$$\sum_{i=1}^{n} |\tilde{x}_i \tilde{y}_i| \le 1.$$

Επομένως

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \leq 1 \text{, οπότε } \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

γ) $\|\cdot\|_p$ $(1<p<\infty)$ νόρμα
(N1), (N2) τετριμμένες.

<u>Τριγωνική ανισότητα</u> (ανισότητα του Minkowski)

$\forall\, x,y \in \mathbb{R}^n \quad \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i+y_i|}_{\leq |x_i|+|y_i|} \cdot |x_i+y_i|^{p-1}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot |x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \cdot |x_i+y_i|^{p-1}$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} \|x\|_p \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^{(p-1)\cdot q} \right)^{1/q}$$

$$+ \|y\| \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$$\|x+y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^{\overset{p}{(p-1)\cdot q}} \right)^{\overset{\frac{p-1}{p}}{1/q}}$$

$$= (\|x\|_p + \|y\|_p) \Big(\underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p \Big)^{1/p}}_{\|x+y\|_p} \Big)^{p-1}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \\ &\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \\ &q(p-1) = p \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \|x+y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x+y\|_p^{p-1}$$

$$\Rightarrow \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

18/4/13

Παρατηρήσεις:

- $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$ $\lambda=0$ δεν είναι ιδιοτιμή του A
  $Ax = 0 \cdot x \Rightarrow x=0$
- $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αυστηρά κυρ. διαγώνιο
  ΝΔΟ. A αντιστρέψιμος
  Έστω λ ιδιοτιμή του A. Τότε

Τότε $|a_{ss}-\lambda| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne s}}^{n} |a_{sj}|$

Για $\lambda=0$, παίρνουμε $|a_{ss}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne s}}^{n} |a_{sj}|$ $\lightning$ (Άτοπο)

Πρόταση: (Σύγκλιση των μεθόδων του Jacobi και των Gauss-Seidel για συστήματα με πίνακα A με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο)

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας πίνακας με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο. Τότε:

α) Για τους πίνακες επανάληψης $G_J = -D^{-1}(L+U)$ και $G_{GS} = -(L+D)^{-1} \cdot U$ των μεθόδων του Jacobi και των Gauss-Seidel, αντίστοιχα, ισχύει $\|G_J\|_\infty < 1$, $\|G_{GS}\|_\infty < 1$

β) Οι μέθοδοι αυτές συγκλίνουν για συστήματα $Ax=b$ με A πίνακα με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο.

Απόδειξη

Κατ' αρχάς ο A είναι αντιστρέψιμος και $a_{ii} \ne 0$, $i=1,\dots,n$

α) Ορίζουμε $C := \max_{1\le i\le n} \left\{ \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}| \right\} < 1$

Jacobi Ισχυρισμός $\|G_J\|_\infty = C$

$(G_J)_{ij} = -\frac{1}{a_{ii}} a_{ij}$, για $i\ne j$ και 0, για $i=j$

$$\begin{Bmatrix} D = diag(d_{11}, \ldots, d_{nn}) \\ (DB)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} d_{il} b_{lj} = d_{ii} b_{ij} \end{Bmatrix}$$

Άρα $\|G_J\|_\infty = \max_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} =$

$$= \max_{1 \le i \le n} \left\{ \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\} = C$$

Gauss-Seidel Ισχυρισμός: $\|G_{GS}\|_\infty \le C$

Έστω $y \in \mathbb{R}$

Θέτουμε $u = G_{GS} \cdot y$, δηλαδή

$$u = -(L+D)^{-1} \cdot U \cdot y \Leftrightarrow (L+D) \cdot u = -U \cdot y \Leftrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij} u_j = -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} y_j, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\Leftrightarrow a_{ii} \cdot u_i = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} y_j, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\Leftrightarrow u_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} y_j \right]$$

$$u_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} y_j \right], \quad i = 1, \ldots, n$$

Ισχυρισμός (*) $|u_i| \le C \|y\|_\infty, \quad i = 1, \ldots, n$

Επαγωγή: $i = 1$

$$u_1 = \frac{1}{a_{11}} \left[-\sum_{j=2}^{n} a_{1j} y_j \right] \Rightarrow |u_1| \le \frac{1}{|a_{11}|} \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| \overbrace{|y_j|}^{\le \|y\|_\infty}$$

$$\le \underbrace{\left(\frac{1}{|a_{11}|} \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| \right)}_{\le C} \|y\|_\infty$$

Άρα η (*) ισχύει για $i=1$.

Υποθέτουμε ότι η (*) ισχύει για $1,\dots,i-1$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για i:

Έχουμε

$$|u_i| \le \frac{1}{|a_{ii}|}\left[\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|\overbrace{|u_j|}^{\le C\|y\|_\infty \le \|y\|_\infty} + \sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|\overbrace{|y_j|}^{\le \|y\|_\infty}\right]$$

$$\le \left(\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}|a_{ij}|\right)\|y\|_\infty$$

Άσκηση 3.23 (συνέχεια) 23/4/13

δ) $1 \le p < q \le \infty$

$x \in \mathbb{C}^n$

<u>Ν.Δ.Ο.:</u> $\|x\|_q \le \|x\|_p$

$\varphi(p) := \|x\|_p$, $p \ge 1$ φθίνουσα

<u>"ανισότητα του Jensen"</u>

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

$$|x_j|^p \le \sum_{i=1} |x_i|^p \Rightarrow |x_j| \le \|x\|_p \quad , j=1,\dots,n$$

(*) $|x_i| \le \|x\|_p$, $i=1,\dots,n$

i) $\max_i |x_i| \le \|x\|_p \Leftrightarrow \|x\|_\infty \le \|x\|_p$

(αυτό αποδεικνύει την ανισότητα για $q=\infty$

ii) $q<\infty$

Τότε $|x_i|^q = |x_i|^p \cdot |x_i|^{q-p}$

$$\overset{(*)}{\le} |x_i|^p \cdot \|x\|_p^{q-p}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q}_{\|x\|_q^q} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right) \|x\|_p^{q-p}$$

$$\|x\|_q^q \le \|x\|_p^p \cdot \|x\|_p^{q-p} = \|x\|_p^q \Rightarrow \|x\|_q \le \|x\|_p$$

Άσκηση 3.24

$\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ στον $\mathbb{R}^n$

Jensen: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$

$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$

Για $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ έχουμε ότι $\|x\|_\infty = 1$, $\|x\|_2 = 1$, $\|x\|_1 = 1$, οπότε οι ανισότητες ισχύουν ως ισότητες.

α) Ισχυρισμός: $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$

Πράγματι $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| \leq \|x\|_\infty + \dots + \|x\|_\infty = n\|x\|_\infty$

Ιδιαίτερα για $x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, έχουμε ότι $\|x\|_1 = n$, $\|x\|_\infty = 1$ οπότε $\|x\|_1 = n\|x\|_\infty$.

β) Ισχυρισμός: $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$

$\|x\|_2^2 = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 \leq \|x\|_\infty^2 + \|x\|_\infty^2 + \dots \|x\|_\infty^2 = n\|x\|_\infty^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|x\|_2 = \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$

Για $x = (1, \dots, 1)^T$ ισχύει ως ισότητα

γ) Ισχυρισμός: $\|x\|_1 < \sqrt{n}\|x\|_2$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot |x_i| \underset{\text{CS}}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{n} \cdot \|x\|_2$$

Για $x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ έχουμε $\|x\|_1 = n$, $\|x\|_2 = \sqrt{n}$,

οπότε η ανισότητα ισχύει ως ισότητα.

Ασκηση 3.64

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7/2 \\ 1 & 1 & 7/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Ax = b$$

ΝΔΟ: Jacobi συγκλίνει
Gauss Seidel γενικά αποκλίνει.

$$G_J = -\underset{I_n}{\underset{\shortparallel}{D^{-1}}} \cdot (L+U) = -(L+U) = -\begin{pmatrix} 0 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 1 & 0 & \frac{7}{4} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_J = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 7/2 \\ -1 & 0 & -7/4 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $p(\lambda) = \det(G_J - \lambda I_3)$
$= -\lambda(\lambda^2 - \frac{1}{4})$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = -\frac{1}{2}$

Φασματική Ακτίνα: $\rho(G_J) = \max\limits_i |\lambda_i| = \frac{1}{2} < 1$

άρα η μέθοδος του Jacobi συγκλίνει

Gauss-Seidel:

$$G_{GS} = -(L+D)^{-1} \cdot U = \underset{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 2 & -7/2 \\ 0 & -2 & 21/4 \\ 0 & 0 & -7/4 \end{pmatrix}$$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 7/4$

Φασματική ακτίνα: $\rho(G_{GS}) = 2 \geq 1$ άρα η μέθοδος αποκλίνει.

Άσκηση 3.65

14/5/13

$Ax=b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ΝΔΟ: μέθοδος Gauss-Seidel : συγκλίνει

" Jacobi : γενικά αποκλίνει

Απόδειξη

$$G_J = -\underbrace{D^{-1}}_{= I_3}(L+U) = -\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$p(\lambda) := |G_J - \lambda I_3|$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & -1/2 & -1 \\ -1 & -\lambda & -1/3 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \dots = -\lambda^3 + \frac{11}{6}\lambda - \frac{7}{6}$$

$$P(-1) = 1 - \frac{11}{6} - \frac{7}{6} = -2$$

$$\lim_{\lambda \to -\infty} p(\lambda) = +\infty$$

Συμπέρασμα: υπάρχει ρίζα του p στο $(-\infty, -1)$

οπότε $\rho(A) > 1$

Άρα η μέθοδος γενικά αποκλίνει

Gauss-Seidel:

$$G_{GS} = -(L+D)^{-1}U = \dots = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Ιδιοτιμές:

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1/2, \lambda_3 = 1/3$

$\rho(A) = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ η μέθοδος συγκλίνει.

Άσκηση 3.31

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Υπάρχει φυσική νόρμα τέτοια ώστε $\|A\| = 2,5$;

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2 - 4 = (\lambda+1)^2 - 4.$$

$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 = 4$

$\Leftrightarrow \lambda + 1 = \pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$

$\rho(A) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) = 3$

$\rho(A) > \|A\|$

Άρα δεν υπάρχει τέτοια φυσική νόρμα

Άσκηση 3.32

α) $\|A\|_{max} = \max\limits_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}|$

$\|A\|_E = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$

Είναι αυτές φυσικές νόρμες;

β) $\forall A \in \mathbb{R}^{n,n}\ \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\|Ax\|_2 \le \|A\|_E \|x\|_2$

(δηλαδή $\|A\|_2 \le \|A\|_E$)

Λύση

α) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\|A\|_{max} = 2$

$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 4$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$

$\rho(A) = 3 > 2 = \|A\|_{max}$

Συμπέρασμα: Η $\|\cdot\|_{max}$ δεν είναι φυσική νόρμα

$\boxed{\text{Αν } \|\cdot\| \text{ φυσική νόρμα } \quad \|I_n\| = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|I_n x\|}{\|x\|} = 1}$

$\|I_n\|_E = \sqrt{n} \neq 1$ για $n \geq 2$

Άρα η $\|\cdot\|_E$ δεν είναι φυσική νόρμα

β) $\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |(Ax)_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2$

$$\underset{CS}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2 \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (x_j)^2}_{\|x\|_2^2}$$

$$= \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij})^2}_{\|A\|_E^2} \cdot \|x\|_2^2$$

$\Rightarrow \|Ax\|_2 \leq \|A\|_E \cdot \|x\|_2$

Άσκηση 3.36

$\|\cdot\|$ $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n,n}$

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ $\|A\|<1$

ΝΔΟ: $I_n - A$ αντιστρέψιμος

$$\frac{1}{1+\|A\|} \le \|(I_n-A)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|A\|}.$$

$(I_n-A)x=0 \Rightarrow x-Ax=0 \Rightarrow x=Ax \Rightarrow \|x\| = \|Ax\| \le \|A\|\cdot\|x\|$

Για $x \neq 0$ παίρνουμε $1 \le \|A\|$ ↯ (Άτοπο), οπότε $x=0$ και ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

$$1 = \|(I_n-A)^{-1}(I_n-A)\|$$
$$\le \|(I_n-A)^{-1}\| \cdot \underbrace{\|(I_n-A)\|}_{\le 1+\|A\|}$$
$$\Rightarrow \|(I_n-A)^{-1}\| \ge \frac{1}{1+\|A\|}$$

$$1 = \|(I_n-A)^{-1}(I_n-A)\|$$
$$= \|(I_n-A)^{-1} - (I_n-A)^{-1}\cdot A\|$$
$$\ge \|(I_n-A)^{-1}\| - \underbrace{\|(I_n-A)^{-1}\cdot A\|}_{\le \|(I_n-A)^{-1}\|\cdot\|A\|}$$
$$\ge \|(I_n-A)^{-1}\| - \|(I_n-A)^{-1}\|\,\|A\|$$

$$= \|(I_n-A)^{-1}\|\,(1-\|A\|)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{1-\|A\|} \ge \|(I_n-A)^{-1}\|$$