26/03/2014 !

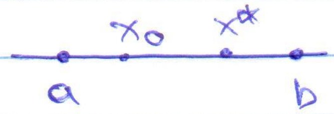
Απόδειξη (Θεώρημα Συστολής) (συνέχεια).

①: $|x_n - x^*| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*)|$

$$\le L \cdot |x_{n-1} - x^*|$$

επαγωγικά θέλω να το εκτιμήσω

$\Rightarrow |x_n - x^*| \le L^n \cdot |x_0 - x^*|$



$|x_0 - x^*| \le \max(x_0 - a, b - x_0)$ (μπορώ να το υπολογίσω)

③: Θέτω: $y_0 = x_{n-1}$

$y_1 = \varphi(y_0) = \varphi(x_{n-1}) = x_n$

Σύμφωνα με τη ②, έχουμε:

$$|y_1 - x^*| \le \frac{L^1}{1-L} \cdot |y_1 - y_0| ,$$ δηλαδή:

$$|x_n - x^*| \le \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$$

Παρατηρήσεις (σχετικές με τα φράγματα)

ⓐ Το πρώτο φράγμα εκτίμηση ① δεν μπορεί γενικά να υπολογιστεί αφού εξαρτάται από το x^*! Όμως:

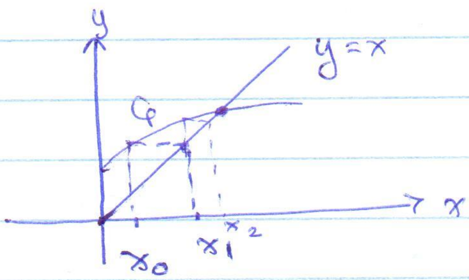
$$x_1 - x_0 = (x_1 - x^*) + (x^* - x_0)$$

$$= [\varphi(x_0) - \varphi(x^*)] + (x^* - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad |x_1 - x_0| \le L\,|x_0 - x^*| + |x_0 - x^*| = (1+L)\,|x_0 - x^*|$$

Άρα το φράγμα στην (2) είναι το πολύ $\frac{L+1}{1-L}$ φορές μεγαλύτερο από το φράγμα στην (1).

(6) Έχουμε $|x_n - x_{n-1}| \le L^{n-1}|x_1 - x_0|$
άρα το φράγμα στην (3) είναι καλύτερο από το φράγμα στην (2). Όμως οι (2) και (3) είναι διαφορετικής φύσης: η (2) είναι εκτίμηση εκ των προτέρων, ενώ η (3) είναι εκτίμηση εκ των υστέρων.



(7) $\varphi(x) = -x$, $x \in [-1,1]$. Τότε ισχύει: $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x-y|$ ($\Rightarrow L=1$)

Για $x_0 \neq 0$, παίρνουμε την ακολουθία: $x_0, -x_0, x_0, -x_0, \dots$
Δεν συγκλίνει!

Ταχύτητα σύγκλισης ακολουθίας

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια συγκλίνουσα ακολουθία, $x_n \to x^*$, $n \to \infty$

Ορισμός: Λέμε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει (τουλάχιστον) γραμμικά (ή ότι η ταχύτητα σύγκλισης είναι τουλάχιστον 1) εάν υπάρχει $\boxed{c<1}$ και

Απορίες: Τετάρτη: 02/04/2014
12:00 - 13:00
Παρασκευή: 13:00 - 14:00

$N \in \mathbb{N}$ τω: $|x_{n+1} - x^*| \leq C_1 |x_n - x^*|^1 \quad \forall n \geq N$

Λέμε ότι η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον p ($\varphi \in p \geq 1$), εάν υπάρχει σταθερά C τω:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C |x_n - x^*|^p \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Στην περίπτωση που η ακολουθία δίνεται στη μορφή $x_n = \varphi(x_{n-1})$ και η φ είναι αρκετά ομαλή, η τάξη σύγκλισης είναι φυσικός αριθμός και μπορεί να υπολογιστεί εύκολα. (Άσκηση)

Παρατηρήσεις:

1. Έστω ότι η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον $p \geq 1$ και $1 \leq q < p$. Τότε η τάξη σύγκλισης είναι και τουλάχιστον q. (Όσο μεγαλύτερη η τάξη σύγκλισης, τόσο ταχύτερα συγκλίνει η ακολουθία

(αποδειξη:)

$$\forall n \in \mathbb{N} : |x_{n+1} - x^*| \leq C_1 |x_n - x^*|^p$$
$$= (\underbrace{C_1 |x_n - x^*|^{p-q}}_{\leq C_2}) |x_n - x^*|^q$$

Στην περίπτωση $q=1$ για αρκετά μεγάλο n, μπορώ να επιλέξω τη σταθερά C_2, μικρότερη του 1, για $C_1 |x_n - x^*|^{p-q} \to 0$, $n \to \infty$

$p=2$: τετραγωνική σύγκλιση.

$p=3$: κυβική σύγκλιση

$$|x_{n+1} - x^*| \le c\, |x_n - x^*|^p$$

• 1η Περίπτωση: $x_n = x^*$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x^* \quad \text{κ.τ.λ}$$

• 2η Περίπτωση: Υποθέτουμε ότι $x_n \neq x^*$ για κάθε n.

$$|x_{n+1} - x^*| \le c\, |x_n - x^*|^p$$

$$\Rightarrow \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^p} \le c \Rightarrow \left| \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} \right| \le c$$

Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $\frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p}$ είναι φραγμένη.

Ειδική περίπτωση: $\boxed{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = a}$

Τότε σύμφωνα με τα προηγούμενα η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον p. Μάλιστα αν $a \neq 0$, τότε η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς p. Πραγματικά, αν η τάξη ήταν $p+\varepsilon$, με οποιοδήποτε θετικό $\varepsilon > 0$, τότε θα είχαμε
$$|x_{n+1} - x^*| \le \tilde{c}\, |x_n - x^*|^{p+\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} \right| \le \tilde{c}\, |x_n - x^*|^{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow |a| \le 0 \quad \text{↯ (άτοπο)}$$

Θεώρημα της συστολής: (τάξη σύγκλισης)

$$x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*)$$

$$\Rightarrow \left| x_{n+1} - x^* \right| \le \underset{\substack{\uparrow \\ L<1}}{L} \left| x_n - x^* \right|$$

$\Rightarrow$ η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον ένα

→ Πότε είναι μεγαλύτερη του ένα;

Υπόθεση: $\varphi \in C^1[a,b]$

Τότε: $x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*)$
$= \varphi'(\xi_n)(x_n - x^*)$
με ξ_n ανάμεσα στα x_n και x^*

Επομένως:

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \varphi'(\xi_n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \varphi'(x^*)$$

Για να είναι η τάξη μεγαλύτερη του 1, πρέπει να ισχύει: $\boxed{\varphi'(x^*) = 0}$

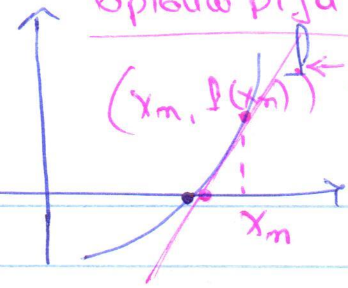
Η μέθοδος του Νεύτωνα:

Γεωμετρικός τρόπος κατασκευής:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

με $\boxed{f'(x_n) \neq 0}$

Βρίσκω ρίζα εφαπτ.



$$\frac{y - f(x_n)}{x - x_n} = f'(x_n)$$

$$y = f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n)$$

$$\Rightarrow 0 = f(x_n) + (x - x_n)\cdot f'(x_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{x}_{x_{n+1}} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Αναλυτικός τρόπος κατασκευής:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = \underbrace{x + f(x)\cdot g(x)}_{\varphi(x)}$$

$f(x^*) = 0$, $\varphi'(x^*) = ;$ (θα θέλα να κάνει $\underline{0}$)

$$\varphi'(x) = 1 + f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\varphi'(x^*)}_{=\,0} = 1 + f'(x^*)\, g(x^*) + 0$$

$$\Rightarrow g(x^*) = -\frac{1}{f'(x^*)}$$

Λογική επιλογή είναι: $g(x) = -\frac{1}{f'(x^*)}$

Τότε: $\boxed{\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$

Η μέθοδος του Νεύτωνα είναι επαναληπτική με συνάρτηση επανάληψης: $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Υπόθεση: Η f είναι 2 φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή I μιας ρίζας της x^* και $f'(x^*) \neq 0$

Ισχυρισμός: $\varphi'(x^*) = 0$

Πράγματι:

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$= \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} \Rightarrow \varphi'(x^*) = 0$$

Θεώρημα (Τοπικά τετραγωνική σύγκλιση της μεθόδου του Νεύτωνα)

Έστω x^* απλή ρίζα μιας συνάρτησης f (δηλ. τω $f(x^*)=0$ και $f'(x^*) \neq 0$). Έστω ότι η f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x^*. Τότε, υπάρχει ένα κλειστό διάστημα I με μέσον το x^* τω: για κάθε αρχική τιμή $x_0 \in I$, η ακολουθία x_n,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$ που κατασκευά-

ζει η μέθοδος του Νεύτωνα να συγκλίνει στο x^*. Μάλιστα

Ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)},$$

Δηλαδή η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον 2, και στην περίπτωση $f''(x^*)\neq 0$ η τάξη είναι ακριβώς 2

27/03/2014

Απόδειξη

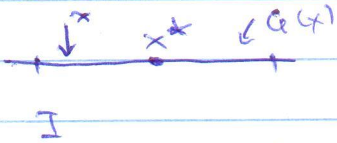
$\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Η φ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x^*. Επιπλέον $\boxed{\varphi'(x^*)=0}$

Επομένως, υπάρχει ένα κλειστό διάστημα I, με μέσον το x^*, τ.ω. το $\max\limits_{x\in I}|\varphi'(x)| = L<1$

$\varphi: I \to I$; (δεν το έχω αποδείξει ακόμα)

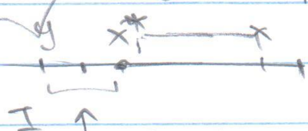
συστολή ✓

αρκεί να αποδείξω ότι $\varphi: I\to I$ και το αποτέλεσμα έπεται από το θεώρημα της συστολής.



$x\in I$ $\quad \varphi(x)-x^* = \varphi(x)-\varphi(x^*)$

$\Rightarrow |\varphi(x)-x^*| \le \underset{<1}{L}\,|x-x^*|$



$|y-x^*|\le|x-x^*|$

$\Rightarrow y\in I$

$\Rightarrow \boxed{|\varphi(x)-\varphi(x^*)|\le|x-x^*|} \Rightarrow \varphi(x)\in I$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Taylor:

$$f(x_n) = \overset{=0}{f(x^*)} + (x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^2}{2} f''(\xi_{n1})$$

$$f'(x_n) = f'(x^*) + (x_n - x^*) \cdot f''(\xi_{n2})$$

με ξ_{n1}, ξ_{n2}, μεταξύ του x_n και x^*.

Επομένως:

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{(x_n - x^*) f'(x^*) + (x_n - x^*)^2/2 \cdot f''(\xi_{n1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x^* = (x_n - x^*)^2 \frac{f''(\xi_{n2}) - \frac{1}{2} f''(\xi_{n1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) \cdot f''(\xi_{n2})}$$

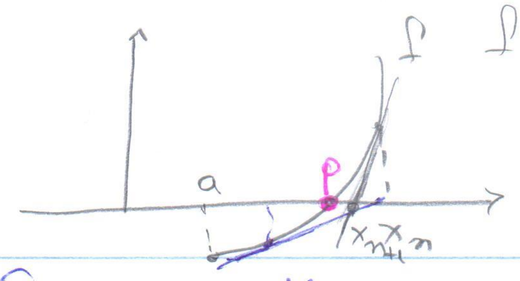
$$\Rightarrow \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{f''(\xi_{n2}) - \frac{1}{2} f''(\xi_{n1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) \cdot f''(\xi_{n2})} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{f''(x^*) - \frac{1}{2} f''(x}{f'(x^*)}$$

$$= \frac{f''(x^*)}{2 f'(x^*)}$$

Πρόταση: (Ολική σύγκλιση της μεθόδου του Νεύτωνα)

Έστω $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη τ.ω. $f(a) < 0$ και $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$, $\forall x > a$. Τότε η f έχει ακριβώς μία ρίζα $\rho > a$, και για $x_0 > a$, η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που παράγει η μέθοδο-

(για οποιοδήποτε ...)



$f(a)<0$ (για να έχει ρίζα)

$$\xi \geq a: \begin{cases} f(\xi) < 0 \iff a \leq \xi < \rho \\ f(\xi) > 0 \iff \xi > \rho \end{cases}$$

δος του Νεύτωνα για την εξίσωση $f(x)=0$ συγκλίνει στη ρ.

Απόδειξη

Μοναδικότητα της ρίζας: Προφανής, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα

Ύπαρξη ρίζας: Η f είναι συνεχής και $f(a)<0$, αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $b>a$ τ.ω.: $f(b)>0$

Έχουμε: $$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2 \underbrace{f''(\xi)}_{>0}}{2} \geq 0$$

$$\Rightarrow f(b) \geq f(a) + (b-a)\cdot f'(a)$$

Όμως: $$f(a)+(b-a)\cdot f'(a) > 0 \Rightarrow \boxed{b > a - \frac{f(a)}{f'(a)}}$$

Συμπέρασμα: Για $b > a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$ έχουμε $f(b)>0$.

(για την σύγκλιση)
(συνάρτηση επανάληψης:)

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{f(x)\, f''(x)}{[f'(x)]^2} > 0$$

$\Rightarrow \varphi'(x) > 0$ για $x > \rho$

$\varphi'(x) < 0$ για $x < \rho$, $x \geq a$

$$x_{n+1} - \rho = \varphi(x_n) - \varphi(\rho)$$
$$= \varphi'(\xi_n)\cdot(x_n - \rho)$$

ξ_n μεταξύ x_n και ρ

- $x_n > p \Rightarrow x_{n+1} > p$
- $x_n < p \Rightarrow x_{n+1} > p$

Συμπέρασμα: $\boxed{x_n \geq p \;, n \geq 1}$

$x_n > p$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n .$$

Συμπέρασμα: Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, και φραγμένη προς τα κάτω από το p.

Επομένως, η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει.

Έστω $x_n \to y$, $n \to \infty$ (Προφανώς, $y \geq p$)

Όμως:
$$\begin{array}{ccccc} x_{n+1} & = & x_n & - & \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \cancel{y} & = & \cancel{y} & - & \dfrac{f(y)}{f'(y)} \end{array}$$

$$\Rightarrow f(y) = 0 \Rightarrow \boxed{y = p}$$

Ερώτημα: Τι μπορούμε να πούμε για την τάξη σύγκλισης στην περίπτωση πολλαπλής ρίζας.

Παράδειγμα: $f(x) = x^2$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n)^2}{2x_n} = \frac{x_n}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot x_0 \;, \; n \in \mathbb{N}$$

επαγωγικά

Ιδιαίτερα: $x_n \to 0$, $n \to \infty$

$$x_{n+1} - x^* = \frac{x_n}{2} = \frac{x_n - x^*}{2}$$

$$\overset{\overset{\uparrow}{\shortparallel}}{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \frac{1}{2}}$$

Τάξη σύγκλισης = 1

Γενικά: Έστω x^* ρίζα τάξης $m \geq 2$ μιας συνάρτησης f, δηλαδή: $f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0$ και $f^{(m)}(x^*) \neq 0$

Τάξη σύγκλισης;

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Taylor:

$$f(x_n) = \underbrace{f(x^*) + (x_n - x^*) f'(x^*) + \dots + \frac{(x_n - x^*)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot f^{(m-1)}(x^*)}_{=0} + \frac{(x_n - x^*)^m}{m!} \cdot f(\xi_{n1})$$

$$f'(x_n) = \boxed{f'(x^*) + \dots + \frac{(x_n - x^*)^{m-2}}{(m-2)!} f^{(m-1)}(x^*)} + \frac{(x_n - x^*)^{m-1}}{(m-1)!} f^{m}(\xi_{n2})$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{\frac{(x_n - x^*)^m}{m!} \cdot f^{(m)}(\xi_{n1})}{\frac{\cancel{(x_n - x^*)}^{m-1} f^{(m)}(\xi_{n2})}{(\cancel{m-1})!}}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - (x_n - x^*) \cdot \frac{f^{(m)}(\xi_{n1})}{m f^{(m)}(\xi_{n2})}$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = 1 - \frac{f^{(m)}(\xi_{n1})}{m f^{(m)}(\xi_{n2})} \xrightarrow{n\to\infty} 1 - \frac{1}{m} \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{τάξη} = 1}$$

$$x_{n+1} = x_n - m \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Μέθοδος της τέμνουσας (προκύπτει από Νεύτωνα)

Νεύτων: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

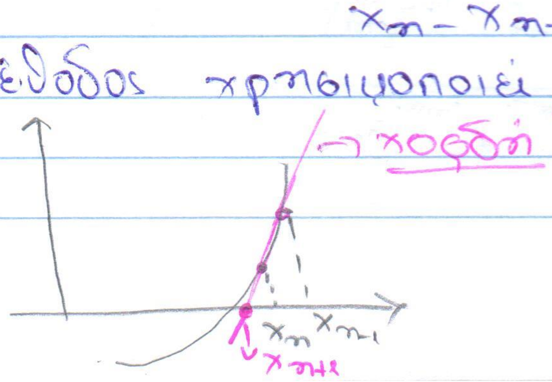
Προσεγγίζουμε την $f'(x_n)$ με:

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$ (είναι κλίση της τέμνουσας)

και παίρνουμε:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$, μέθοδος της τέμνουσας

Η μέθοδος χρησιμοποιεί δύο αρχικές τιμές x_0 και x_1



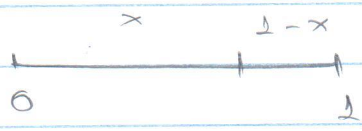
Κόστος ανά βήμα: Ένας υπολογισμός της f.

Θεώρημα: (Τάξη σύγκλισης της μεθόδου της τέμνουσας)

Έστω x^* ρίζα μιας συνάρτησης f, και ένα διάστημα $(a,b) \subset \mathbb{R}$ τ.ω: $x^* \in (a,b)$ και $f \in C^2(a,b)$ και $f'(x^*) \neq 0$ και $f''(x^*) \neq 0$. Τότε υπάρχει ένα διάστημα I που περιέχει το x^* τ.ω: για κάθε αρχικές τιμές $x_0, x_1 \in I$ με $x_0 \neq x_1$ η ακολουθία $(x_n)_{n \in N}$ που παράγει η μέθοδος της τέμνουσας, συγκλίνει στο x^*. Η τάξη σύγκλισης είναι $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$

Η μέθοδος της τέμνουσας χρησιμοποιείται στην πράξη συχνότερα από τη μέθοδο του Νεύτωνα. Ο λόγος: Δεν χρησιμοποιεί την παράγωγο και χρησιμοποιεί έναν υπολογισμό της f ανά βήμα. Συγκλίνει λίγο πιο αργά από τη μέθοδο του Νεύτωνα.

χρυσός λόγος



$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

ή χρυσή τομή

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Υπόθεση: Το κόστος υπολογισμού τιμών της f και της f' είναι το ίδιο

$(x_n)_{n \in N}$ Νεύτων.

$(y_n)_{n \in N}$ τέμνουσα

Θεωρούμε την ακολουθία (y_{2n})

Τάξη σύγκλισης $= p^2 \approx 2.62 > 2$

Νεύτωνα

Ισχυρισμός: $y_n \to x^*$, τάξη $= p$

$z_n = y_{2n} \to x^*$, τάξη $= p^2$

$$|y_{n+1} - x^*| \le C\,|y_n - x^*|^p$$

$$|z_{n+1} - x^*| = |y_{2n+2} - x^*| \le C\,|y_{2n+1} - x^*|^p$$

$$\le C\left(C\,|y_{2n} - x^*|^p\right)^p$$

$$= C^{p+1}\,|\underbrace{y_{2n}}_{z_n} - x^*|^{p^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{|z_{n+1} - x^*| \le C^{p+1} \cdot |z_n - x^*|^{p^2}}$$

28/03/2014

Άσκηση 1.12 (συνέχεια)

(δ) Ευσταθής αλγόριθμος για τον υπολογισμό του y_{10}

Ξεκινάμε με την προσέγγιση $\tilde{y}_{20} \approx 0$ (μέγιστο σφάλμα $\le \frac{1}{21a}$)

Υπολογίζουμε τις προσεγγίσεις $\tilde{y}_{19}, \tilde{y}_{18}, \dots, \tilde{y}_{10}$ αναδρομικά από τον τύπο :

$$\tilde{y}_{n-1} = \left(\frac{1}{n} - \tilde{y}_n\right) \cdot \frac{1}{a}, \quad n = 20, \dots, 11$$

Ευστάθεια;

$$y_{n-1} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{n} - y_n\right)$$

$$\Rightarrow y_{n-1} - \tilde{y}_{n-1} = \frac{-1}{a}\left(y_n - \tilde{y}_n\right)$$

$$\Rightarrow y_{10} - \tilde{y}_{10} = \frac{1}{(-a)^{10}}\left(y_{20} - \tilde{y}_{20}\right)$$ → (σταθμίσατα που κάνω)

$$\Rightarrow |y_{10} - \tilde{y}_{10}| = \frac{1}{a^{10}}|y_{20} - \tilde{y}_{20}|$$

↑

ευσταθής αλγόριθμος

Άσκηση 1.13

$a \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + (1-a)y &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \tilde{x} + \tilde{y} &= 1 + \varepsilon_1 \\ \tilde{x} + (1-a)\tilde{y} &= \varepsilon_2 \end{aligned}$$

Για $a=0$ αδύνατο!

Θέτουμε $u = \tilde{x} - x$ και $v = \tilde{y} - y$, και έχουμε :

$$\left.\begin{aligned} u + v &= \varepsilon_1 \\ u + (1-a)v &= \varepsilon_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} u &= \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{a} \\ v &= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{a} \end{aligned}$$

Συμπέρασμα: Το σύστημα έχει καλή κατάσταση για $|a|$ μεγάλη, ενώ έχει κακή κατάσταση για $|a|$ μικρή.

Άσκηση 2.18

$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\varphi(x^*) = x^*$

Η φ είναι $p \geq 2$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x^*

Υπόθεση: $\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \dots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$
και $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$

$x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n = 0, 1, 2 \dots$

- ΝΔΟ: για x_0 αρκετά κοντά στο x^* ισχύει: $x_n \to x^*$, $n \to \infty$

- $$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = \underbrace{\frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(x^*)}_{\neq 0}$$

Δηλαδή η τάξη σύγκλισης της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακριβώς p.

Απόδειξη (μοιάζει με Θεώρημα τοπικής σύγκλισης)

Αφού $\varphi'(x^*) = 0$, υπάρχει κλειστό διάστημα I, με μέσον το x^* τ.ω.: $\max_{x \in I} |\varphi'(x)| = L < 1$

Τότε $\varphi : I \to I$ και σύμφωνα με το θεώρημα της συστολής

• η $(x_n)_{n\in N}$ είναι καλά ορισμένη

• $x_n \to x^*$, $n \to \infty$

Τάξη σύγκλισης:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \varphi(x_n) \\ &= \underbrace{\varphi(x^*)}_{x^*} + \cancel{(x_n - x^*)}^{\to 0} \cdot \varphi'(x^*) + \dots + \frac{\cancel{(x_n - x^*)^{p-1}}^{\to 0}}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}(x^*) \end{aligned}$$

↑ taylor ως προς x^*

$$+ \frac{(x_n - x^*)^p}{p!} \cdot \varphi^{(p)}(\xi_n)$$, με ξ_n μεταξύ των x_n και x^*

$$\Rightarrow x_{n+1} - x^* = \frac{(x_n - x^*)^p}{p!} \cdot \varphi^{(p)}(\xi_n)$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = \frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(\xi_n) \longrightarrow \frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(x^*), \quad n \to \infty$$

Άσκηση 2.4

$f : [-1, \sqrt{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^3$

Μέθοδος διχοτόμησης:

ΝΔΟ: $\lim_{n \to \infty} x_n = \frac{1}{2}$ (ελέγχω αν το 1/2 είναι ρίζα της $f(x)$)

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[-1, \sqrt{2}]$

$f(-1) = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 < 0$

$f(\sqrt{2}) = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^3 > 0$

άρα η $x_n \to x^*$, $n \to \infty$
με x^* ρίζα της f

Όμως, η f έχει μόνο μια ρίζα στο $[-1, \sqrt{2}]$ την $x^* = \frac{1}{2}$
συνεπώς

$$x_n \to \frac{1}{2}, \quad n \to \infty$$

Άσκηση 2.7

$\varphi : [a,b] \to [a,b]$
$\varphi \in C^1[a,b]$
$\underbrace{\max_{a \le x \le b} |\varphi'(x)|}_{L} < 1$

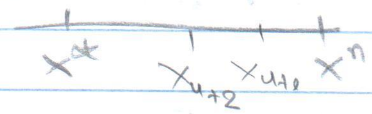
(Η φ απεικονίζει το $[a,b]$ στο $[a,b]$ και είναι συστολή)

$x_0 \in [a,b]$
$x_{n+1} = \varphi(x_n)$ $n \in \mathbb{N}_0$ καλά ορισμένη και:
$x_n \to x^*$, $n \to \infty$, όπου x^* μοναδικό σταθερό σημείο της φ στο $[a,b]$

(a) Αν $\varphi'(x) > 0$, για κάθε $x \in [a,b]$, ΝΔΟ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει μονότονα στο x^*

(b) Αν $\varphi'(x)<0$, για κάθε $x\in[a,b]$, τότε το x^* περιέχεται μεταξύ x_{i-1} και x_i

Λύση

(a) 

$$x_i - x^* = \varphi(x_{i-1}) - \varphi(x^*)$$
$$= \varphi'(\xi_i)(x_{i-1} - x^*)$$

- αν $\varphi'(x)>0 \Rightarrow (x_i - x^*)\cdot(x_{i-1} - x^*)>0$
- αν $\varphi'(x)<0 \Rightarrow (x_i - x^*)\cdot(x_{i-1} - x^*)<0$

$$|x_i - x^*| = |\varphi'(\xi_i)|\cdot|x_{i-1} - x^*|$$
$$< |x_{i-1} - x^*|$$

01/04/2014

Άσκηση 2.8 (Θουστολής)

$x_0\in[0,1]$
$$x_{n+1} = \frac{1}{2} e^{\frac{x_n}{2}}, \quad n\in\mathbb{N}_0$$

ΝΔΟ: $x_n \to x^* \in[0,1]$, $n\to\infty$

Λύση

$\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$
$$\varphi(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}, \quad (x_{n+1} = \varphi(x_n))$$

α.ν.δ.ο - $\varphi: [0,1] \longrightarrow [0,1]$
- φ συστολή $(L<1)$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} > 0$$

$\Rightarrow$ φ αύξουσα

$$\Rightarrow \underbrace{\varphi(0)}_{\frac{1}{2} \geq 0} \leq \boxed{\varphi(x)} \leq \underbrace{\varphi(1)}_{\frac{1}{2}\sqrt{e} \leq 1}, \quad \forall x \in [0,1]$$

$\Rightarrow 0 \leq \varphi(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow \varphi: [0,1] \longrightarrow [0,1]$

$$L = \max_{0 \leq x \leq 1} |\varphi'(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} \left(\frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{e} \leq \frac{1}{2}$$

επειδή είναι αύξουσα το max το έχει για $x=1$

Η φ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος της συστολής, επομένως η $(x_n)_{n\in N}$ συγκλίνει και το όριό της είναι $x^* \in [0,1]$

Άσκηση 2.9

$x_0 \in [1,0]$

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2 + x_n - e^{x_n}\right), \quad n \in N_0$$

ΝΔΟ: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^* \in [0,1]$

Λύση

$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$

$\varphi(x) = \frac{1}{3}(2 + x - e^{x})$

$\varphi'(x) = \frac{1}{3}(\underbrace{1 - e^{x}}_{\leq 0})$

Για x≥0 το e^x παίρνει τιμές μεγαλύτερες του 1 άρα $1 - e^x \leq 0$

$\Rightarrow \varphi$ φθίνουσα

$\Rightarrow \varphi(1) \leq \varphi(x) \leq \varphi(0) \quad \forall x \in [0,1]$ ⇒ α.ν.δ.ο. φ(1) και φ(0) έχουν τιμές που ανήκουν στο [0,1]

$\varphi(1) = \frac{3-e}{3} \geq 0$, $\quad \varphi(0) = \frac{1}{3} \leq 1$

$\Rightarrow \quad 0 \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi : [0,1] \to [0,1]$

$\varphi''(x) = -\frac{1}{3} e^{x} < 0 \quad \Rightarrow \varphi'$ φθίνουσα.

$\Rightarrow L = \max_{0 \leq x \leq 1} |\varphi'(x)| = \max(|\varphi'(0)|, |\varphi'(1)|)$

$= \max\left(0, \frac{e-1}{3}\right) = \frac{e-1}{3} < 1$

Άσκηση 2.10

$x_0 \in [0,1]$

$x_{n+1} = \frac{1}{6}(3 + 4x_n^2 - e^{x_n}), \quad n \in \mathbb{N}_0$

ΝΔΟ: $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x^* \in [0,1]$

και $|x_n - x^*| \leq \frac{a^n}{1-a} |x_1 - x_0|$

με $a = \frac{8-e}{6}$.

Λύση

$\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$\varphi(x) = \frac{1}{6}\left(3 + 4x^2 - e^x\right)$

$\varphi'(x) = \frac{1}{6}\left(8x - e^x\right)$

$\varphi'(0) = -\frac{1}{6} < 0 \quad , \quad \varphi'(1) = \frac{1}{6}(8-e) > 0$

$\Rightarrow$ η φ δεν είναι μονότονη

$$\varphi(x) \leq \underbrace{\max_{0 \leq x \leq 1} \left(\frac{1}{6}\left(3+4x^2\right)\right.}_{} + \left.\max_{0 \leq x \leq 1} \frac{1}{6}\left(-e^x\right)\right)$$

$$\frac{1}{6}\cdot 7 + \left(-\frac{1}{6}\cdot e^0\right) = \frac{7}{6} - \frac{1}{6} = 1 \leq 1$$

$$\varphi(x) \geq \min_{0 \leq x \leq 1} \left(\frac{1}{6}\left(3+4x^2\right)\right) + \min_{0 \leq x \leq 1} \left(\frac{1}{6}\left(-e^x\right)\right) =$$

$$= \frac{3}{6} - \frac{e}{6} = \frac{3-e}{6} \geq 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{3-e}{6}}_{\geq 0} \leq \varphi(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0,1]$$

$\Rightarrow \varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$

$\varphi''(x) = \frac{1}{6}\left(8 - e^x\right) > 0$

$\Rightarrow \varphi'$ είναι αύξουσα

$$L = \max_{0 \le x \le 1} |\varphi'(x)| = \max\left(|\varphi'(0)|, |\varphi'(1)|\right)$$

$$= \max\left(\frac{1}{6}, \frac{8-e}{6}\right) = \frac{8-e}{6} < 1$$

Το αποτέλεσμα έπεται από το θεώρημα της συστολής.

Άσκηση 2.11

$x_0 \in \mathbb{R}$

$x_{n+1} = \cos(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$

<u>ΝΔΟ:</u> $\displaystyle x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$ $\quad (\cos(x^*) = x^*)$

<u>και</u> $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = -\sqrt{1-(x^*)^2}$

<u>Λύση</u>

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\varphi(x) = \cos x$

Προφανώς η φ απεικονίζει το $\mathbb{R}$ στο $[-1, 1]$

$\varphi : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

$\varphi'(x) = -\sin x$

$\Rightarrow \displaystyle \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi'(x)| = 1$ (όχι συστολή)

Παρατηρούμε ότι $x_n \in [-1, 1]$ $n \geq 1$

Θεωρώ: $\varphi : [-1, 1] \to \cancel{\mathbb{R}}$ $[-1, 1]$

με $\varphi(x) = \cos x$

$$\max_{-1 \le x \le 1} |\varphi'(x)| = \max_{0 \le x \le 1} \sin x = \underbrace{\sin 1}_{L} < 1$$

$\Rightarrow x_n \to x^*$, $n \to \infty$ και $\boxed{\cos x^* = x^*}$

$x^* > 0$

$$x_{n+1} - x^* = \cos x_n - \cos x^*$$
$$= \left(-\sin(\xi_n)\right) \cdot (x_n - x^*)$$

με ξ_n μεταξύ x_n, και x^*

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = -\sin(\xi_n) \xrightarrow{n \to \infty} -\sin x^* = -\sqrt{1 - \cos^2 x^*}$$
$$= -\sqrt{1 - (x^*)^2}$$