2º Κεφάλαιο

Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων.

Δεδομένο: Μια πραγματική συνάρτηση f μιας πραγματικής μεταβλητής.

Ζητούμενο: Πραγματικές ρίζες x^* της f, δηλαδή $x^* \in \mathbb{R}$ τ.ω $f(x^*) = 0$

Αριθμητικές μέθοδοι: Δίνουν μια ακολουθία προσεγγίσεων $x_1, x_2, \ldots$ η οποία, υπό κατάλληλες προϋποθέσεις συγκλίνει στη x^*. Τότε, για αρκετά μεγάλο N, επιλέγουμε ως προσέγγιση της x^* τη x_N (συνήθως με εμπειρικά κριτήρια).

Συμβολισμός: Αν I ένα διάστημα, τότε

$$C(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ συνεχής} \}.$$

$$C^n(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \ / \ f \ n \text{ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη} \}, \quad n \in \mathbb{N}$$

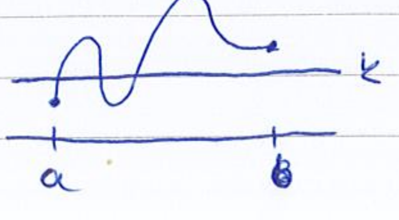
$C^n[a, b]$, $C^n(a, b]$

Η μέθοδος της διχοτόμησης:

Είναι η απλούστερη αριθμητική μέθοδος, οικονομική σε κάθε βήμα, και συγκλίνει πάντα όταν μπορεί να εφαρμοστεί.

Η μέθοδος βασίζεται στο Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής

Έστω ότι $g \in C[a, b]$ και k πραγματικός αριθμός ανάμεσα στους $g(a)$ και $g(b)$. Τότε υπάρχει $x \in [a, b]$ τ.ω $g(x) = k$



$f \in C[a,b]$

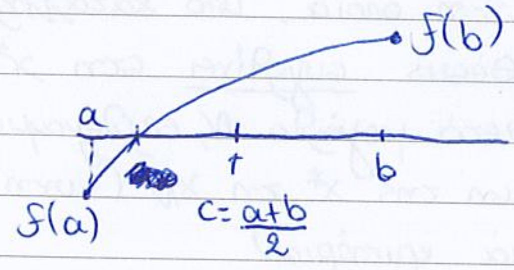
<u>Υπόθεση</u>: $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b)$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{για } x>0 \\ 0 & \text{για } x=0 \\ -1 & \text{για } x<0 \end{cases}$$

<u>1η περίπτωση</u>: Το $f(a)=0 \rightsquigarrow a$ ρίζα.

<u>2η περίπτωση</u>: Το $f(b)=0 \rightsquigarrow b$ ρίζα.

<u>3η περίπτωση (ενδιαφέρουσα)</u>: $f(a)\cdot f(b)<0$



a) $f(c)=0$ Τότε c ρίζα της f.

β) $f(c)\neq 0$

Αν $f(a)\cdot f(c)<0$, τότε υπάρχει ρίζα της f στο $[a,c]$

Αν $f(a)\cdot f(c)>0$, τότε $f(c)\cdot f(b)<0$, οπότε θα υπάρχει ρίζα της f στο $[c,b]$.

Τα διαστήματα $[a,c]$ και $[c,b]$ έχουν μήκος το μισό του $[a,b]$.

<u>Δεδομένα του αλγορίθμου</u>:

a, b f τω $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b)$,

$f \in C[a,b]$ και $\varepsilon>0$

(το ε λέγεται <u>ανοχή σφάλματος</u> ή μέγιστο ~~σφα~~ επιτρεπτό σφάλμα)

Αν $x^* \in [a, b]$, τότε

$$|x^* - \frac{1}{2}(a+b)| \leq \frac{b-a}{2}$$

Αλγόριθμος της μεθόδου της διχοτόμησης.

υπολόγισε $f(a)$, $\delta = b - a$

1. $\delta \leftarrow \frac{\delta}{2}$

Αν $\delta \leq \varepsilon$, τύπωσε τα a, b. Έξοδος.

διαφορετικά (δηλαδή $\delta > \varepsilon$):

υπολόγισε το $c = \frac{a+b}{2}$, $f(c)$

τύπωσε $a, b, c, \delta, f(c)$

αν $f(c) = 0$, έξοδος.

διαφορετικά (δηλαδή $f(c) \neq 0$):

αν $\operatorname{sgn} f(c) = \operatorname{sgn} f(a)$

$a \leftarrow c$ και $f(a) \leftarrow f(c)$

διαφορετικά (δηλαδή αν $\operatorname{sgn} f(c) \neq \operatorname{sgn} f(a)$):

$b \leftarrow c$

πήγαινε 1

7-03-17

Πρακτικά ζητήματα:

για τον αλγόριθμο της μεθόδου της διχοτόμησης.

1. Το ερώτημα "αν $\text{sgn}\, f(a) = \text{sgn}\, f(c)$"
δεν πρέπει να τίθεται στη μορφή
"αν $f(a) \cdot f(c) > 0$" γιατί μπορεί να οδηγήσει
σε υπερχείλιση.

2. Το μέσο $c = \frac{a+b}{2}$ του διαστήματος $[a, b]$,
καλό είναι να υπολογίζεται ως $c = a + \frac{b-a}{2}$
γιατί διαφορετικά μπορεί να οδηγήσει
σε ένα σημείο έξω από το διάστημα (a, b)

Παράδειγμα: $b = 10$, $t = 2$, $U = -L = 10$, αποκοπή.

$a = .61$, $b = .66$

Τότε

$$fl(a+b) = fl(1.23) = 1.2$$

$$c = \frac{a+b}{2} = 0{,}6 < a!$$ (έξω από το διάστημα)

3. Πολύ μικρή ανοχή σφάλματος ε μπορεί να οδηγήσει σε
φαύλο κύκλο.

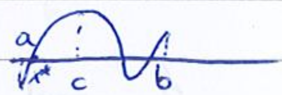
$$c = a + \frac{b-a}{2}$$ Αν $fl(a + fl(\varepsilon)) = a$
τότε $c = a$

Πρόταση. (εκτίμηση του σφάλματος της μεθόδου της διχοτόμησης)
Έστω $f \in C[a, b]$, $\text{sgn}\, f(a) \neq \text{sgn}\, f(b)$, και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ η
ακολουθία των προσεγγίσεων (δηλαδή των μέσων διαδοχικών
διαστημάτων) που παράγει η μέθοδος της διχοτόμησης.
Τότε είτε $x_N = x^*$ για κάποιο N, είτε $x_n \to x^*$, $n \to \infty$
όπου $x^* \in (a, b)$ ρίζα της f (λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$).
Μάλιστα,

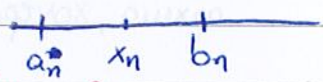
$$|x^* - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Απόδειξη: Θέταμε $a_1 = a$ και $b_1 = b$ και συμβολίζαμε με $I_i = [a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \dots$ τα διαδοχικά διαστήματα που κατασκευάζει η μέθοδος της διχοτόμησης.

Προφανώς $I_{i+1} \subset I_i$ και επειδή σε κάθε I_i υπάρχει μια ρίζα της f, συμπεραίναμε ότι υπάρχει μια ρίζα x^* της f που ανήκει σε όλα τα I_i. Το πλήθος των I_i είναι πεπερασμένο, αν $x_N = x^*$ για κάποιο N, διαφορετικά είναι άπειρο.
Τώρα για κάθε n έχουμε $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$,



οπότε $|x^* - x_n| \le \frac{b_n - a_n}{2}$



Επιπλέον,

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} = \dots = \frac{\overset{\overset{b}{\shortparallel}}{b_1} - \overset{\overset{a}{\shortparallel}}{a_1}}{2^{n-1}}$$

Επομένως,

$$|x^* - x_n| \le \frac{\frac{b-a}{2^{n-1}}}{2} = \frac{b-a}{2^n}$$

Έστω ότι θέλουμε να ισχύει $|x^* - x_n| \le \varepsilon$ με δεδομένο ε.
Αρκεί να ισχύει $\frac{b_n - a_n}{2} \le \varepsilon$ ή

$$\frac{b-a}{2^n} \le \varepsilon \iff \frac{b-a}{\varepsilon} \le 2^n$$

$$\Rightarrow \log\frac{b-a}{\varepsilon} \le n \log 2 \iff n \ge \frac{\log\frac{b-a}{\varepsilon}}{\log 2}$$

Μέθοδος της διχοτόμησης

Πλεονεκτήματα:

1. Μπορεί να εφαρμοστεί υπό γενικές συνθήκες στην f, απαιτεί μόνο συνέχεια της f και αλλαγή προσήμου της f σε μια περιοχή μιας ρίζας της.

2. Συγκλίνει πάντα, όταν μπορεί να εφαρμοστεί
3. Απαιτεί μόνο έναν υπολογισμό της f ανά βήμα.
4. Μπορούμε να υπολογίσουμε εκ των προτέρων το πλήθος των βημάτων που εξασφαλίζουν την προσέγγιση μιας ρίζας με δεδομένη ακρίβεια.

<u>Μειονέκτημα:</u> Η μέθοδος συγκλίνει πολύ αργά, με αποτέλεσμα το συνολικό κόστος να είναι υψηλό.

Στην πράξη η μέθοδος της διχοτόμησης χρησιμοποιείται για έναν αρχικό, χονδρικό εντοπισμό της λύσης.

$$|x^* - x^n| \leq \varepsilon_n = \frac{b-a}{2^n}$$

<u>Επαναληπτικές μέθοδοι</u>:

<u>Ιδέα</u>: Γράφουμε την εξίσωση $\boxed{f(x)=0}$ ισοδύναμα στη μορφή $\varphi(x) = x$.

<u>Ορισμός</u>(σταθερό σημείο): Ένα σημείο x^* του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης ϕ, λέγεται σταθερό σημείο της ϕ, αν $\phi(x^*) = x^*$

Ξεκινώντας με μια αρχική προσέγγιση x_0 ενός σταθερού σημείου της ϕ, υπολογίζουμε προσεγγίσεις $x_1, x_2, \ldots$ ως εξής:

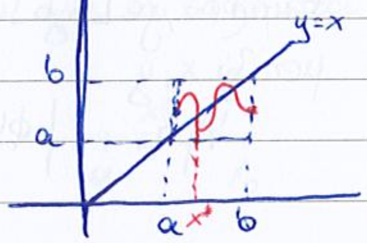
$$x_{n+1} = \phi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Πρόταση (Ύπαρξη σταθερού σημείου).

Κάθε συνεχής συνάρτηση $\phi : [a,b] \to [a,b]$ έχει στο $[a,b]$ (τουλάχιστον) ένα σταθερό σημείο.

συνθήκη

Απόδειξη:



Ισχυρισμός: Ισχύει τουλάχιστον μία από τις εξής τρεις συνθήκες:

α) $\phi(a) = a$

β) $\phi(b) = b$

γ) $\phi(a) > a$ και $\phi(b) < b$

Στις δύο πρώτες το a ή το b αντίστοιχα, είναι σταθερό σημείο.
Στην τρίτη περίπτωση ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x) := \phi(x) - x$, $x \in [a,b]$

Η g είναι συνεχής και $g(a) = \phi(a) - a > 0$

$g(b) = \phi(b) - b < 0$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα x^* της g στο $[a,b]$.

Οπότε $g(x^*) = 0 \iff \phi(x^*) - x^* = 0$

$\iff \phi(x^*) = x^*$

δηλαδή το x^* είναι σταθερό σημείο της ϕ.

Ορισμός (Συνθήκη του Lipschitz):

Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα. Λέμε ότι μια συνάρτηση $\phi : I \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί στο I τη συνθήκη του Lipschitz αν $\exists L \geq 0$ τ.ω $\forall x, y \in I$

$$(*) \quad |\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x-y|.$$

$\forall m \in \mathbb{N} \ \exists n \in \mathbb{N} \ m < n$

$\exists n \in \mathbb{N} \ \forall m \in \mathbb{N} \ m < n$

↑ λάθος

Στην περίπτωση που ισχύει η $*$ με $L < 1$, η ϕ λέγεται συστολή στο I.

Παρατήρηση:

α) Αν $\phi \in C^1[a,b]$, τότε η ϕ ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz με $L = \max_{a \le x \le b} |\phi'(x)|$.

Έστω $x, y \in [a,b]$, $x \neq y$. Τότε $\frac{\phi(x) - \phi(y)}{x-y} = \phi'(\xi)$ για κάποιο ξ μεταξύ x, y

Άρα, $\left| \frac{\phi(x) - \phi(y)}{x-y} \right| = |\phi'(\xi)| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \frac{\phi(x) - \phi(y)}{x-y} \right| \le \underbrace{\max_{a \le x \le b} |\phi'(\xi)|}_{L}$$

L ανεξάρτητη από x και y

$$\Rightarrow |\phi(x) - \phi(y)| \le L \cdot |x-y|$$

β) Αν η ϕ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα που δεν είναι κλειστό, δεν ικανοποιεί αναγκαστικά τη συνθήκη του Lipschitz.

Παράδειγμα: $\phi(x) = \sqrt{x}$, $x \in (0, 1]$

$$\phi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Τότε, για $x, y \in (0,1]$, $x \neq y$ έχουμε $\frac{\phi(x) - \phi(y)}{x-y} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$

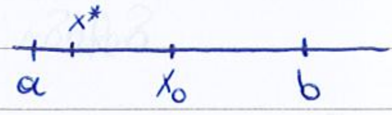
Για $x \downarrow 0$, $y \downarrow 0$, έχουμε $\xi \downarrow 0$, οπότε $\frac{1}{2\sqrt{\xi}} \to \infty$, οπότε

$$\left| \frac{\phi(x) - \phi(y)}{x-y} \right| \to \infty \quad \text{καθώς } x, y \downarrow 0!$$

9-03-17

Θεώρημα (της συστολής)

Έστω $\phi : [a,b] \to [a,b]$ μια συστολή με σταθερά L $(L<1)$. Τότε η ϕ έχει στο $[a,b]$ ακριβώς ένα σταθερό σημείο x^*. Μάλιστα για οποιοδήποτε $x_0 \in [a,b]$, η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $x_n := \phi(x_{n-1})$ $n\in\mathbb{N}$, είναι καλά ορισμένη, συγκλίνει προς το x^*, και για τα σφάλματα $x_n - x^*$ ισχύουν οι εκτιμήσεις:



① $|x_n - x^*| \le L^n |x_0 - x^*|$

$\Rightarrow |x_n - x^*| \le L^n \max(x_0 - a, b - x_0)$

② $|x_n - x^*| \le \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$

και ③ $|x_n - x^*| \le \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$

Απόδειξη:

• Μοναδικότητα σταθερού σημείου.

Έστω $x^*, y^* \in [a,b]$, $x^* \neq y^*$, σταθερά σημεία της ϕ.
Τότε

$$x^* - y^* = \phi(x^*) - \phi(y^*)$$

$$|x^* - y^*| = |\phi(x^*) - \phi(y^*)| \le \underbrace{\underset{<1}{L}\,\overset{\neq 0}{|x^* - y^*|}}_{<|x^* - y^*|}$$

Άτοπο.

• Ύπαρξη και ①:

Η ύπαρξη σταθερού σημείου έπεται από την προηγούμενη πρόταση.

Τώρα $x_n - x^* = \phi(x_{n-1}) - \phi(x^*)$

$$|x_n - x^*| = \underbrace{|\phi(x_{n-1}) - \phi(x^*)|}_{\le L|x_{n-1} - x^*|}$$

άρα ① $|x_n - x^*| \le L|x_{n-1} - x^*|$, $n\in\mathbb{N}$

Επαγωγικά έχουμε,

(*) $|x_n - x^*| \le L^n |x_0 - x^*|$, $n\in\mathbb{N}$

<u>Για $n=1$</u>: $|x_1 - x^*| \leq L|x_0 - x^*|$

Ισχύει σύμφωνα με την ⊕, επιλέγοντας $n=1$.

<u>Για $n \to n+1$</u>: $|x_{n+1} - x^*| \leq L|x_n - x^*| \leq L^n |x_0 - x^*|$

⊕ με $n+1$ αντί για n. υπόθεση της επαγωγής.

$\Rightarrow |x_{n+1} - x^*| \leq L^{n+1} |x_0 - x^*|$

Δηλαδή ισχύει η ⊛ και για $n+1$.

- <u>Ύπαρξη και ②</u>:

<u>Ισχυρισμός</u>: Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι ακολουθία Cauchy:

Έχουμε

$x_n - x_{n-1} = \phi(x_{n-1}) - \phi(x_{n-2})$

$\Rightarrow |x_n - x_{n-1}| = \underbrace{|\phi(x_{n-1}) - \phi(x_{n-2})|}_{\leq L|x_{n-1} - x_{n-2}|}$

$\Rightarrow |x_n - x_{n-1}| \leq L|x_{n-1} - x_{n-2}|$

$\Rightarrow \boxed{|x_n - x_{n-1}| \leq L^{n-1}|x_1 - x_0|}$

επαγωγικά

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$

$a_n \to a, \ n \to \infty$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |a_n - a| \leq \varepsilon$

ακολουθία Cauchy

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq N \ |a_n - a_m| \leq \varepsilon$

Επομένως, για $k\in\mathbb{N}$, έχουμε

$$|x_{n+k} - x_n| = |(x_{n+k} - x_{n+k-1}) + (x_{n+k-1} - x_{n+k-2}) + \dots + (x_{n+1} - x_n)|$$

$$\leq \underbrace{|x_{n+k} - x_{n+k-1}|}_{\leq L^{n+k-1}|x_1 - x_0|} + \underbrace{|x_{n+k-1} - x_{n+k-2}|}_{\leq L^{n+k-2}|x_1 - x_0|} + \dots + \underbrace{|x_{n+1} - x_n|}_{\leq L^n |x_1 - x_0|}$$

$\Rightarrow |x_{n+k} - x_n| \leq (L^{n+k-1} + L^{n+k-2} + \dots + L^n)|x_1 - x_0|$

$\Rightarrow |x_{n+k} - x_n| \leq L^n \underbrace{(L^{k-1} + L^{k-2} + \dots + 1)}_{\frac{1-L^k}{1-L}}|x_1 - x_0|$ ← Γεωμετρική πρόοδος για $k\to\infty$, $L^k \to 0$

$$|x_{n-k}-x_n| \le L^n \frac{1-L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

$$\Rightarrow |x_{n-k}-x_n| \le \frac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|, \quad n\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{N}$$

Το δεξιό μέλος τείνει στο μηδέν όταν $n\to\infty$, επομένως η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι όντως ακολουθία Cauchy.

$$S_k = 1+L+L^2+\dots+L^{k-1}$$

$$\Rightarrow L\cdot S_k = L+L^2+L^3+\dots+L^k$$

$$\Rightarrow LS_k - S_k = L^k - 1$$

$$S_k = \frac{L^k-1}{L-1} = \frac{1-L^k}{1-L}$$

Επομένως, η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε ένα σημείο $x^*\in[a,b]$

Τότε,

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\phi(x_{n-1})$$

$$= \phi\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right) = \phi(x^*)$$

χρησιμοποιεί συνέχεια της ϕ στο x^*.

Τώρα,

$$|x_{n+k}-x_n| \le \frac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|, \quad k\in\mathbb{N}$$

$k\to\infty$, x^*

$$\Rightarrow |x^*-x_n| \le \frac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|$$

• Απόδειξη της (3).

Θέτουμε $y_0 = x_{n-1}$ και έχουμε $y_1 = \phi(y_0) = \phi(x_{n-1}) = x_n$

Χρησιμοποιούμε τη (2) για τα y_n (με $n=1$) και παίρνουμε

$$\underbrace{|y_1 - x^*|}_{x_n} \le \frac{L}{1-L} |y_1 - y_0|$$

$y_1 = x_n$, $y_0 = x_{n-1}$

$$\Rightarrow |x_n - x^*| \le \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$$

Παρατηρήσεις.

α) Η (2) είναι εκτίμηση εκ των προτέρων, ενώ η (3) είναι εκτίμηση εκ των υστέρων

β) Τώρα, όπως είδαμε

$$|x_n - x_{n-1}| \le L^{n-1} |x_1 - x_0|,$$

οπότε

$$\frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}| \le \frac{L}{1-L} L^{n-1} |x_1 - x_0|$$

$$= \boxed{\frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|}$$

Επομένως, το φράγμα στην (3) είναι το πολύ όσο και το φράγμα στην (2)

Το πρώτο φράγμα στην (1) δεν είναι πρακτικά χρήσιμο γιατί εξαρτάται από το άγνωστο x^*

Αλλά,

$$x_1 - x_0 = (x_1 - x^*) + (x^* - x_0)$$

$$\Rightarrow |x_1 - x_0| \le |x_1 - x^*| + |x_0 - x^*|$$

$$= \underbrace{|\phi(x_0) - \phi(x^*)|}_{\le L|x_0 - x^*|} + |x_0 - x^*|$$

$$\Rightarrow |x_1 - x_0| \le (1+L)|x_0 - x^*|$$

Άρα, το φράγμα στη (2) είναι το πολύ κατά τον παράγοντα $\frac{1+L}{1-L}$ μεγαλ. του πρώτου φράγματος της (1).

γ) Τι γίνεται για $L \geq 1$;

Παράδειγμα: $\phi(x) = -x$, $x \in [-1, 1]$.

Τότε το $L = 1$.

Μοναδικό σταθερό σημείο της ϕ είναι το $x^* = 0$.

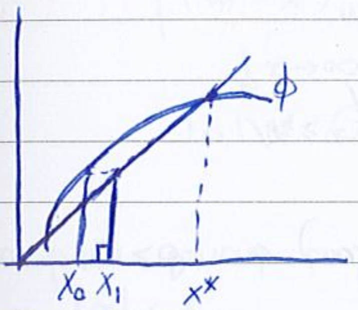
Έστω $x_0 \neq 0$ με $x_0 \in [-1, 1]$

Τότε, η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $x_n = \phi(x_{n-1})$,

είναι:

$x_0, -x_0, x_0, -x_0, x_0, \ldots$

Δεν συγκλίνει.



Ορισμός: (Τάξη σύγκλισης ακολουθίας)

Έστω μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνουσα και x^* το όριό της.

Λέμε ότι η ακολουθία αυτή συγκλίνει (τουλάχιστον) γραμμικά.

ή ότι η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον 1, αν υπάρχει $C < 1$ και $N \in \mathbb{N}$ τ.ω

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C |x_n - x^*| \quad \forall n \geq N$$

με $C < 1$.

Λέμε ότι η τάξη είναι τουλάχιστον ρ αν υπάρχει C^* τ.ω

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C_* |x_n - x^*|^\rho, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Ενδιαφέρουσα περίπτωση: $x_n \neq x^* \ \forall n \in \mathbb{N}$

Τότε,

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C_* |x_n - x^*|^\rho \iff \left| \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^\rho} \right| \leq C_*$$

Η τάξη ~~ακρίβειας~~ σύγκλισης είναι τουλάχιστον ρ, αν-ν η ακολουθία

$\frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^\rho}$ είναι φραγμένη.

Ικανή συνθήκη: Υποθέταμε ότι $\lim \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p} = \alpha$

Τότε η τάξη ~~ακρίβειας~~ σύγκλισης είναι τουλάχιστον ρ

Μάλιστα, αν $\alpha \neq 0$ τότε η τάξη ~~ακρίβειας~~ σύγκλισης είναι ακριβώς ρ.

$\boxed{10-03-17}$

Ταχύτητα σύγκλισης ακολουθιών

Ορισμός (τάξη σύγκλισης)

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία που συγκλίνει στο x^*. Λέμε ότι η ακολουθία συγκλίνει (τουλάχιστον) γραμμικά ή ότι η τάξη σύγκλισης της είναι (τουλάχιστον) ένα, αν υπάρχει $C<1$ και $N\in\mathbb{N}$ τ.ω

$$|x_{n+1}-x^*| \leq C\,|x_n-x^*| \quad \forall n\geq N$$

Λέμε ότι η τάξη σύγκλισης είναι (τουλάχιστον) ρ, $p>1$, αν υπάρχει $C>0$, τ.ω

$$|x_{n+1}-x^*| \leq C\,|x_n-x^*|^p \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Για $p=2$, μιλάμε για τετραγωνική σύγκλιση.
" $p=3$ " " κυβική "

Προσδιορισμός της τάξης σύγκλισης:

Υπόθεση:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p} = \alpha$$

- Έστω $p>1$:

Τότε η τάξη σύγκλισης της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τουλάχιστον ρ.

Πράγματι, αφού η $\frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p}$ συγκλίνει, είναι φραγμένη.
Επομένως, υπάρχει $C>0$:
τ.ω $\left|\frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p}\right| \leq C \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Ⓣ

Τότε, θα έχαμε:

$$|x_{n+1} - x^*| \le C|x_n - x^*|^p \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

δηλαδή η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον p.

Αν $a\neq 0$, τότε η τάξη σύγκλισης είναι <u>ακριβώς p</u>

Πράγματι, αν η τάξη ήταν $p+\varepsilon$ (με $\varepsilon>0$), θα είχαμε

$$|x_{n+1} - x^*| \le C|x_n - x^*|^{p+\varepsilon}$$

Τότε,

$$\left|\frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p}\right| \le C|x_n - x^*|^{\varepsilon}.$$

$$\Big\downarrow n\to\infty$$

$$|a| \le C\cdot 0 = 0 \rightsquigarrow a=0 \text{ (άτοπο)}.$$

- Για $p=1$ ισχύουν ακριβώς τα ίδια υπό την προϋπόθεση ότι $|a|<1$.

<u>Θεώρημα της συστολής.</u>

$$x_{n+1} - x^* = \phi(x_n) - \phi(x^*) \Rightarrow$$

$$|x_{n+1} - x^*| \le \underset{<1}{L}\,|x_n - x^*| \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Άρα η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον 1.

Έστω επί πλέον ότι $\phi\in C^1[a,b]$

Τότε,

$$x_{n+1} - x^* = \phi(x_n) - \phi(x^*) = \phi'(\xi_n)(x_n - x^*)$$

με ξ_n μεταξύ των x_n και x^*

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \phi'(\xi_n), \quad \text{οπότε} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \boxed{\phi'(x^*)}$$

Όμως $|\phi'(x^*)|<1$

Αν $\phi'(x^*) \neq 0$, τότε η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς 1.

Συμπέρασμα:

Αναγκαία συνθήκη για τάξη >1 είναι η $\boxed{\phi'(x^*) = 0}$

Η μέθοδος του Νεύτωνα.

$f(x) = 0$ με f συνεχώς παραγωγίσιμη.

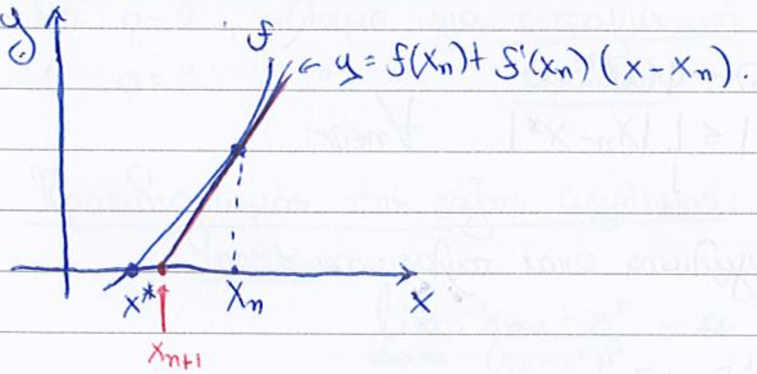
Μέθοδος του Νεύτωνα:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\underset{\neq 0}{f'(x_n)}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Είναι μια επαναληπτική μέθοδος με συνάρτηση επανάληψης,

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Γεωμετρικός τρόπος κατασκευής.



$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0 \iff$$

$$x - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \iff \overset{=x_{n+1}}{x} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Αναλυτικός τρόπος κατασκευής.

που δεν έχει ρίζες

$$f(x) = 0 \iff g(x)\cdot f(x) = 0 \iff$$

$$x = \underbrace{\boxed{x + g(x)\cdot f(x)}}_{\phi(x)}$$

Ιδιότητα της ϕ: $\phi'(x) = 1 + g'(x)\cdot f(x) + g(x)\cdot f'(x)$

$$\Rightarrow \phi'(x^*) = 1 + g'(x^*)\cdot \cancelto{0}{f(x^*)} + g(x^*)\cdot f'(x^*)$$

$$\Rightarrow \phi'(x^*) = 0 \iff g(x^*) = -\frac{1}{f'(x^*)}$$

Λογική επιλογή:

$$g(x) = -\frac{1}{f'(x)}$$

Τότε $\phi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

21-03-17.

Η Μέθοδος του Νεύτωνα.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Θεώρημα (τοπικά τετραγωνική σύγκλιση της μεθόδου του Νεύτωνα).
Έστω x^* απλή ρίζα μιας συνάρτησης f, δηλαδή $f(x^*)=0$ και $f'(x^*) \neq 0$, και έστω ότι η f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x^*. Τότε, υπάρχει ένα κλειστό διάστημα I με μέσον το x^*, τ.ω για κάθε $x_0 \in$ στο I η ακολουθία $(x_n)_{n\in N}$ που δίνει η μέθοδος του Νεύτωνα για τη εξίσωση $f(x)=0$, συγκλίνει στο x^*

Μάλιστα ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

δηλαδή η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον δύο (μάλιστα είναι ακριβώς δύο, αν $f''(x^*)\neq 0$).

__Απόδειξη__

Με $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ η μέθοδος γράφεται στη μορφή

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

Η ϕ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x^* και

$$\phi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Ιδιαίτερα, $\phi'(x^*) = 0$

Επομένως, υπάρχει ένα κλειστό διάστημα I, με μέσον το x^*, τ.ω $\max_{x\in I}|\phi'(x)| = L < 1$

Ιδιαίτερα, η ϕ είναι συστολή στο I, επιπλέον για $x\in I$ έχομε

$$\phi(x) - x^* = \phi(x) - \phi(x^*) \Rightarrow$$

$$|\phi(x) - x^*| = |\phi(x) - \phi(x^*)| \leq L|x-x^*|$$

$$\Rightarrow |\phi(x) - x^*| \leq |x - x^*|$$

$$\Rightarrow \phi(x)\in I.$$

↑ το x^* είναι μέσον του I (Άσκηση 2.12).

__Ανακεφαλαιώνοντας__

$\phi: I \to I$ και είναι συστολή.

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα της συστολής, για οποιοδήποτε $x_0\in I$, η ακολουθία (x_n) πεπλ. συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο της ϕ στο I, δηλαδή x^*.

Για την τάξη σύγκλισης:

Ανάπτυγμα Taylor.

$$f(x_n) = f(x^*) + (x_n - x^*) f'(x) + \frac{(x_n - x^*)^2}{2} f''(\xi_{n1})$$

$$f'(x_n) = f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})$$

με ξ_{n1}, ξ_{n2} σημεία ανάμεσα x_n και x^*.

Επομένως,

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{(x_n - x^*) \cdot f'(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^2}{2} \cdot f''(\xi_{n1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) \cdot f''(\xi_{n2})} \Rightarrow$$

$$x_{n+1} - x^* = \frac{(x_n - x^*)^2 \cdot f''(\xi_{n2}) - \frac{(x_n - x^*)^2}{2} \cdot f''(\xi_{n1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) \cdot f''(\xi_{n2})} \Rightarrow$$

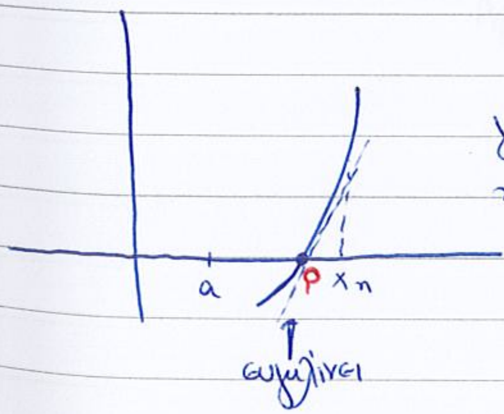
$$\frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{f''(\xi_{n2}) - \frac{1}{2} \cdot f''(\xi_{n1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) \cdot f''(\xi_{n2})}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{f''(x^*) - \frac{1}{2} \cdot f''(x^*)}{f'(x^*)} = \frac{f''(x^*)}{2 f'(x^*)}$$

Πρόταση ("ολική" σύγκλιση της μεθόδου του Newton)

Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη τ.ω

$f(a) < 0$ και $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ για $x \geq a$



Τότε η f έχει ακριβώς 1 ρίζα $\rho \in [a, \infty)$ για οποιαδήποτε αρχική προσέγγιση $x_0 \geq a$, η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που δίνει η μέθοδος του Newton για την εξίσωση $f(x) = 0$ συγκλίνει στην ρ.

Απόδειξη

- Μοναδικότητα ρίζας: Η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε έχει το πολύ μια ρίζα.

- Ύπαρξη ρίζας: $f(a)<0$, f συνεχής
Αρκεί να αποδείξω ότι $f(b)>0$ για κάποιο b.

$$f(b)=f(a)+(b-a)\cdot f'(a)+\underbrace{\frac{(b-a)^2}{2}\cdot f''(\xi)}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow f(b)\geq f(a)+(b-a)f'(a)$$

Αρκεί το b να είναι τ.ω

$$f(a)+(b-a)\cdot f'(a)>0 \iff$$

$$(b-a)>-\frac{f(a)}{f'(a)} \iff$$

$$\Rightarrow b>a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

- $f(\xi)<0$ για $\xi\in[a,\rho]$
$f(\xi)>0$ για $\xi>\rho$

Τώρα,

$$\phi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow \phi'(x)=\frac{f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}>0$$

<u>Συμπέρασμα</u>: για $x\in[a,\rho)$ $\phi'(x)<0$
για $x>\rho$ $\phi'(x)>0$

$$x_{n+1}-\rho=\phi(x_n)-\phi(\rho)\Rightarrow$$

$$x_{n+1}-\rho=\phi'(\xi_n)(x_n-\rho)$$

Άρα $x_n>\rho \rightarrow x_{n+1}>\rho$
$x_n<\rho \rightarrow x_{n+1}>\rho$

$\cdot\ x_n = \frac{1}{n} + x^*$ γνησια φθινουσα συγκ στο x^*

$\cdot\ x_n = -\frac{1}{n} + x^*$ γνησια αυξουσα συγκ στο x^*

$\cdot\ x_n = \frac{(-1)^n}{n} + x^*$

Συμπερασμα $x_n > p \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Εστω $x_n > p$

Τοτε $x_{n+1} = \underset{<0}{x_n -} \dfrac{\overset{>0}{f(x_n)}}{\underset{>0}{f'(x_n)}}$

$\Rightarrow x_{n+1} < x_n$.

Συμπερασμα: Η ακολουθια $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ειναι φθινουσα και φραγμένη απο κατω ~~απο~~ από το p.

Επομένως, η ακολουθια αυτή συγκλίνει. Έστω $y=0$, οριο της. Εχουμε,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$\downarrow$$
$$y = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \Rightarrow f(y) = 0$$
$$\Rightarrow y = p.$$

Ερώτημα: Τι συμβαίνει στην περίπτωση πολλαπλής ρίζας;

π.χ $f(x) = x^2$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n)^2}{2x_n} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$$

$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n x_0 \quad , n\in\mathbb{N}$

Άρα $x_n \longrightarrow x^* = 0 \quad , n\to\infty$

Τάξη σύγκλισης:

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x_0}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n} x_0} = \frac{1}{2}.$$

Τάξη σύγκλισης $= 1$

Γενική περίπτωση: Έστω x^* ρίζα μιας συνάρτησης f, τάξης $m \geq 2$

δηλαδή

$$f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0$$

και

$$f^{(m)}(x^*) \neq 0$$

Για x_0 αρκετά κοντά στο x^*, η ακολουθία που δίνει η μέθοδος του Νεύτωνα συγκλίνει στο x^*

Ερώτημα: Τάξη σύγκλισης;

Taylor: $$f(x_n) = \cancel{f(x^*)}^{0} + (x_n - x^*) \cancel{f'(x^*)}^{0} + \dots + \frac{(x_n - x^*)^{m-1}}{(m-1)!} \cancel{f^{(m-1)}(x^*)}^{0} + \frac{(x_n - x^*)^m}{m!} f^{(m)}(\xi_{n_1})$$

Άρα

$$f'(x_n) = \frac{(x_n - x^*)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(\xi_{n_2})$$

Επομένως, αντικαθιστώντας στην $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

παίρνουμε.

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = 1 - \frac{f^{(m)}(\xi_{n1})}{m \cdot f^{(m)}(\xi_{n2})}$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} 1 - \frac{1}{m} \neq 0$$

Άρα τάξη σύγκλισης $= 1$.

Παραλλαγή της μεθόδου:

$$x_{n+1} = x_n - m \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

τάξη $= 2$.

(23-03-17)

Μέθοδος του Νεύτωνα

Πλεονεκτήματα: Για αρχική προσέγγιση x_0 κοντά$^{\text{ετ}}$ μια ρίζα x^* μιας ομαλής συνάρτησης f συγκλίνει ταχύτατα, αν η x^* είναι απλή (ή αν τροποποιήσαμε κατάλληλα τη μέθοδο όταν γνωρίζαμε την πολλαπλότητα της x^*)

Σε ειδικές περιπτώσεις συγκλίνει ολικά.

Μειονεκτήματα: Το διάστημα I, στο οποίο πρέπει να ανήκει η αρχική προσέγγιση x_0 ώστε η μέθοδος να συγκλίνει δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων. και μπορεί να είναι πολύ μικρό.

Χρήση μεθόδου στην πράξη: Εκτός από τις περιπτώσεις που η μέθοδος του Νεύτωνα συγκλίνει ολικά, αυτή χρησιμοποιείται στην πράξη με κάποια βραδύτερη μέθοδο, όπως η μέθοδος της διχοτόμησης. Πρώτα χρησιμοποιούμε τη βραδύτερη μέθοδο για να προσδιορίσουμε μια αρκετά καλή προσέγγιση της ρίζας και με αυτή τη προσέγγιση ως αρχική τιμή εφαρμόζουμε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να επιταχύνουμε τη σύγκλιση.

Μέθοδος της τέμνουσας:

Μέθοδος του Νεύτωνα:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

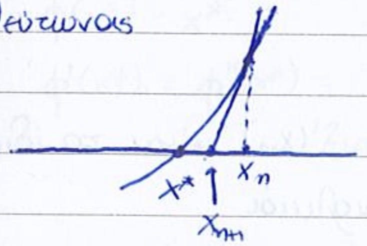
Προσεγγίζοντας την $f'(x_n)$ με $\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$

οδηγούμαστε στη μέθοδο της τέμνουσας.

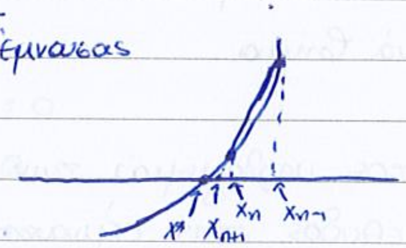
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

- Η μέθοδος της τέμνουσας δεν μπορεί να γραφεί στη μορφή $x_{n+1} = \phi(x_n)$ με κατάλληλη ϕ, οπότε δεν είναι επαναληπτική μέθοδος.
- Απαιτεί δύο αρχικές προσεγγίσεις x_0 και x_1

Νεύτωνας



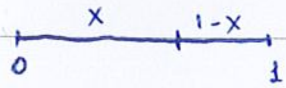
Τέμνουσας



Κόστος ανά βήμα: 1 υπολογισμός της f
(δηλαδή υπολογισμός της $f(x_n)$, η $f(x_{n-1})$ χρειάστηκε και στο προηγούμενο βήμα)

Θεώρημα (Τάξη σύγκλισης της μεθόδου της τέμνουσας)
Έστω x^* ρίζα μιας συνάρτησης f, και $(a, b) \in \mathbb{R}$ με $x^* \in (a, b)$, $f \in C^2(a, b)$, $f'(x^*) \neq 0$, $f''(x^*) \neq 0$

Τότε, υπάρχει ένα διάστημα I που περιέχει το x^* τ.ω. για $x_0, x_1 \in I$, $x_0 \neq x_1$, η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που δίνει η μέθοδος της τέμνουσας για την εξίσωση $f(x)=0$ συγκλίνει στο x^*.
Η τάξη σύγκλισης είναι $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.62$ (επειδή δεν είναι επαναληπτική)



$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \iff x^2 + x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Άρα $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

χρυσός λόγος τομή $\quad \frac{1}{x} = -\frac{2}{1-\sqrt{5}} = -\frac{2(1+\sqrt{5})}{1-5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Η μέθοδος της τέμνουσας χρησιμοποιείται στην πράξη συχνότερα από τη μέθοδο του Νεύτωνα, επειδή απαιτεί γνώση μόνο της f και όχι της f'.
Είναι βραδύτερη από τη μέθοδο του Νεύτωνα, αλλά είναι οικονομικότερη ανά βήμα.

<u>Υπόθεση</u>: Το κόστος υπολογισμού των $f(x_n)$ και $f'(x_n)$ είναι το ίδιο.
<u>Ισχυρισμός</u>: Η μέθοδος της τέμνουσας είναι συνολικά οικονομικότερη από τη μέθοδο του Νεύτωνα.

<u>Παρατήρηση</u>: Έστω ότι η τάξη σύγκλισης μιας ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε ένα σημείο x^* είναι p.

<u>Ερώτημα</u>: Ποιά είναι η τάξη της ακολουθίας $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$y_n := x_{2n}$, $n\in\mathbb{N}$

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C_1 |x_n - x^*|^p$$

$$|y_{n+1} - x^*| = |x_{2n+2} - x^*|$$
$$\leq C_1 |x_{2n+1} - x^*|^p$$
$$\leq C_1 (C_1 |x_{2n} - x^*|^p)^p$$
$$= C_1^{p+1} |\underset{y_n}{x_{2n}} - x^*|^{p^2}$$

$$\Rightarrow |y_{n+1} - x^*| \leq \underset{\tilde{C}}{\underset{\shortparallel}{C_1^{p+1}}} |y_n - x^*|^{p^2}$$ Άρα η τάξη είναι p^2.

Τώρα

επειδή συγκρίνω 2 επιμ. τεμν. με 1 επιμ. Νευτ.

$$\tilde{p}^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2.62 > 2$$

<u>Συμπέρασμα</u>: Η μέθοδος της τέμνουσας είναι συνολικά αποδοτικότερη της μεθόδου του Νεύτωνα.

24-03-17

<u>Άσκηση 2.19</u>

$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad p \geq 2$

$\phi(x^*) = x^*$

$\phi'(x^*) = \phi''(x^*) = \ldots = \phi^{(p-1)}(x^*) = 0$

και $\phi^{(p)}(x^*) \neq 0$

$x_{n+1} = \phi(x_n)$, πεπο

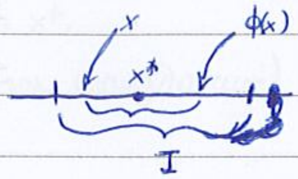
ΝΔΟ: Για x_0 αρκετά κοντά στο x^*, η ακολουθία (x_n) πεπο συγκλίνει στο x^*

- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = \dfrac{1}{p!} \phi^{(p)}(x^*) \neq 0$

$\Rightarrow$ Τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς p

• $\phi'(x^*)=0 \Rightarrow$ υπάρχει κλειστό διάστημα I, με μέσο το x^*
τω

$$\max_{x\in I}|\phi'(x)| = L < 1.$$



Επομένως, η ϕ είναι συστολή στο I

Επίσης, για $x\in I$ έχουμε

$$\phi(x)-x^* = \phi(x)-\phi(x^*) = (x-x^*)\cdot\phi'(\xi)$$

με ξ μεταξύ x και x^*

Άρα,

$$|\phi(x)-x^*| = \underbrace{|\phi'(\xi)|}_{\le L<1}\cdot|x-x^*| \le |x-x^*|$$

$$\Rightarrow \phi(x)\in I$$

<u>Συμπέρασμα</u>: $\phi: I\to I$ και συστολή στο I

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα της συστολής, η ϕ έχει στο I ακριβώς ένα σταθερό σημείο x^* και $\underline{x_n\to x^*,\ n\to\infty}$

• $$x_{n+1} = \phi(x_n) \underset{\text{Taylor}}{=} \phi(x^*) + (x_n-x^*)\cancelto{0}{\phi'(x^*)} + \dots + \frac{(x_n-x^*)^{p-1}}{(p-1)!}\cancelto{0}{\phi^{(p-1)}(x^*)} + \frac{(x_n-x^*)^{p}}{p!}\cdot\phi^{(p)}(\xi_n)$$

με ξ_n μεταξύ x_n και x^*

$$\Rightarrow x_{n+1} = \underbrace{\phi(x^*)}_{x^*} + \frac{(x_n-x^*)^p}{p!}\cdot\phi^{(p)}(\xi_n)$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p} = \frac{1}{p!}\cdot\phi^{(p)}(\xi_n) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{p!}\phi^{(p)}(x^*)$$

Εφαρμογή

$x_{n+1} = (x_n)^2 - 2x_n + 2, \quad n \in \mathbb{N}_0$

$x_0 \in [\frac{1}{3}, \frac{5}{3}]$

$x^* = 1$. Τάξη σύγκλισης;

$\phi(x) = x^2 - 2x + 2$

$\phi'(x) = 2x - 2 \rightsquigarrow \phi'(1) = 0$

$\phi''(x) = 2 \rightsquigarrow \phi''(1) = 2 \neq 0$

$\Rightarrow \boxed{p = 2}$

2.4. Άσκηση.

$f: [-1, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^3$

N.Δ.Ο: $x_n \to \frac{1}{2}, \quad n \to \infty$

Έχουμε:

- f συνεχής
- $f(-1) = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 < 0$
- $f(\sqrt{2}) = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^3 > 0$

Η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σε μια ρίζα της f (στο $[-1, \sqrt{2}]$).
Αλλά, η μοναδική ρίζα της f στο $[-1, \sqrt{2}]$ είναι $x^* = \frac{1}{2}$, οπότε
$x_n \to \frac{1}{2}, \quad n \to \infty$

Άσκηση 2.7

$\phi : [a,b] \to [a,b]$, $\phi \in C^1[a,b]$

$\max\limits_{a \le x \le b} |\phi'(x)| < 1$

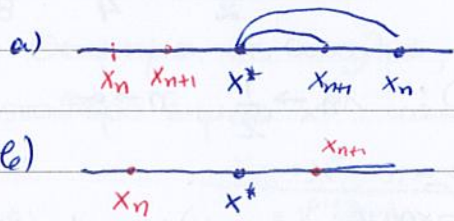
x^* σταθερό σημείο της ϕ.

$x_0 \in [a,b]$, $x_0 \neq x^*$

$x_n = \phi(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$

α) Αν για κάθε $x \in [a,b]$ ισχύει $\phi'(x) > 0$,
ΝΔΟ η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει <u>μονότονα</u>. στο x^*

β) Αν για κάθε $x \in [a,b]$ ισχύει $\phi'(x) < 0$,
<u>ΝΔΟ</u>: Το x^* <u>περιέχεται</u> μεταξύ x_{i-1} και x_i για κάθε i.



Η ύπαρξη, η μοναδικότητα του x^* και το ότι $x_n \to x^*$, $n \to \infty$ έπονται από το Θεώρημα της συστολής.

Τώρα,

$$x_{n+1} - x^* = \phi(x_n) - \phi(x^*) = \phi'(\xi_n)\cdot(x_n - x^*)$$

$$\Rightarrow (x_{n+1} - x^*)(x_n - x^*) = \phi'(\xi_n)\cdot(x_n - x^*)^2 \quad (*)$$

α) $\overset{(*)}{\leadsto} (x_{n+1} - x^*)(x_n - x^*) > 0 \Rightarrow$
Τα $x_n - x^*$ και $x_{n+1} - x^*$ είναι ομόσημα

Συγκλίνει μονότονα Επίσης $|x_{n+1} - x^*| = \underbrace{|\phi'(\xi_n)|}_{<1} |x_n - x^*| < |x_n - x^*|$

$\Bigg\}$ Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει μονότονα στο x^*

β) $(*) \to (x_{n+1} - x^*)(x_n - x^*) < 0$

$\Rightarrow$ Το x^* περιέχεται μεταξύ x_n και x_{n+1}

Άσκηση 2.8 $x_0 \in [0,1]$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x_n}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ΝΔΟ: $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x^* \in [0,1]$

Απόδειξη:

$\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$

$(x_{n+1} = \phi(x_n))$

• $\phi'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4} e^{x/2} > 0$

$\Rightarrow |\phi'(x)| = \frac{1}{4} \cdot \underset{\text{αύξουσα}}{e^{x/2}} \leq \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{4} < 1.$

$\Rightarrow \max_{0 \leq x \leq 1} |\phi'(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{4} < 1$

$\Rightarrow$ Η ϕ είναι συστολή στο $[0,1]$

Ισχυρισμός: $\phi : [0,1] \to [0,1]$

~~Για $x \in [0,1]$, έχουμε~~

Αφού η ϕ είναι αύξουσα, για $0 \leq x \leq 1$ ισχύει

$\underbrace{\phi(0)}_{\frac{1}{2}} \leq \phi(x) \leq \underbrace{\phi(1)}_{\frac{\sqrt{e}}{2} < 1}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \phi(x) \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \phi(x) \leq 1$

$\Rightarrow \phi(x) \in [0,1]$

Σύμφωνα με το Θεώρημα της συστολής, η ϕ έχει στο $[0,1]$ ακριβώς ένα σταθερό σημείο x^* και $x_n \to x^*$, $n \to \infty$

Άσκηση 29 $x_0 \in [0,1]$

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(2 + x_n - e^{x_n})$$

ΝΔΟ $x_n \to x^* \in [0,1]$ για $n \to \infty$

Απόδειξη

$$\phi(x) = \frac{1}{3}(2 + x - e^x) \text{ για } x \in [0,1]$$

$$\phi'(x) = \frac{1}{3}(1 - e^x) \leq 0 \text{ για } x \in [0,1]$$

$\Rightarrow$ Η ϕ είναι φθίνουσα

Για $x \in [0,1]$ έχουμε,

$$\underset{\substack{\| \\ 0 \leq \frac{3-e}{3}}}{\phi(1)} \leq \phi(x) \leq \underset{\substack{\| \\ \frac{1}{3} \leq 1}}{\phi(0)}$$

Για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε ότι $0 \leq \phi(x) \leq 1$

Άρα: $\phi : [0,1] \to [0,1]$

$$\phi''(x) = -\frac{1}{3}e^x < 0 \Rightarrow \phi' \text{ είναι φθίνουσα.}$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0,1] \quad \underset{\substack{\| \\ \frac{1-e}{3}}}{\phi'(1)} \leq \phi'(x) \leq \underset{\substack{\| \\ 0}}{\phi'(0)}$$

$$\Rightarrow \max_{0 \leq x \leq 1} |\phi'(x)| = \max\left(\left|\frac{1-e}{3}\right|, 0\right) = \frac{e-1}{3} < 1$$

Συμπέρασμα, η ϕ είναι συστολή στο $[0,1]$

Άρα, το ζητούμενο έπεται από το Θεώρημα της συστολής.

(**2ος τρόπος** $\phi'(x) = \frac{1}{3}(1 - e^x)$

$$\Rightarrow |\phi'(x)| = \frac{1}{3}|1 - e^x| = \frac{1}{3}\underset{\substack{\downarrow \\ \text{αύξουσα}}}{(e^x - 1)}$$

$$\Rightarrow \max_{0 \leq x \leq 1} |\phi'(x)| = \frac{1}{3}|e^1 - 1| = \frac{e-1}{3}$$)

Άσκηση 2.10

$x_0 \in [0,1]$

$$x_{n+1} = \frac{1}{6}[3 + 4(x_n)^2 - e^{x_n}]$$

$$\rightarrow x^* \in [0,1]$$

και $|x_n - x^*| \le \frac{a^n}{1-a}|x_1 - x_0|,\ n \in N$

με $a = \frac{8-e}{6}$

Απόδειξη $\phi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(x) = \frac{1}{6}[3 + 4x^2 - e^x]$$

$$\phi'(x) = \frac{1}{6}(8x - e^x)$$

$$\phi''(x) = \frac{1}{6}(8 - e^x) > 0$$

$\Rightarrow$ Η ϕ' είναι γνήσια αύξουσα.

Επομένως, για $x \in [0,1]$ έχουμε ότι:

$$\underset{\substack{\| \\ -\frac{1}{6}}}{\phi'(0)} \le \phi'(x) \le \underset{\substack{\| \\ \frac{8-e}{6}}}{\phi'(1)}$$

$$\Rightarrow \max_{0\le x\le 1}|\phi'(x)| = \max\left(\left|\frac{8-e}{6}\right|, \left|-\frac{1}{6}\right|\right) = \frac{8-e}{6} = \underset{\substack{\downarrow \\ a}}{L} < 1$$

Μένει να αποδείξουμε ότι $\phi : [0,1] \rightarrow [0,1]$

- Η $3+4x^2$ είναι αύξουσα και η $-e^x$ είναι φθίνουσα, οπότε

$$\max_{0\le x\le 1}\phi(x) \le \max_{0\le x\le 1}\left(\frac{1}{6}(3+4x^2)\right) + \max_{0\le x\le 1}\left(-\frac{1}{6}e^x\right)$$

$$= \frac{1}{6}(3+4) + \frac{1}{6}(-e^0) = 1 \le 1.$$

Επίσης, έχουμε:

$$\min_{0\le x\le 1}\phi(x) \ge \min_{0\le x\le 1}\left(\frac{1}{6}(3+4x^2)\right) + \min_{0\le x\le 1}\left(-\frac{1}{6}e^x\right)$$

$$= \frac{1}{6}(3+4\cdot 0^2) + \left(-\frac{1}{6}e\right) = \frac{3-e}{6} > 0$$

Παρατήρηση

$f(x) = \phi(x) + \psi(x)$

Ισχυρισμός: $\max_{a\le x\le b} f(x) \le \max_{a\le x\le b}\phi(x) + \max_{a\le x\le b}\psi(x)$

$\min_{a\le x\le b} f(x) \ge \min_{a\le x\le b}\phi(x) + \min_{a\le x\le b}\psi(x)$

$\max_{a\le x\le b} f(x) = f(\tilde{x}) = \phi(\tilde{x}) + \psi(\tilde{x}) \le$

$\le \max_{a\le x\le b}\phi(x) + \max_{a\le x\le b}\psi(x).$

$\boxed{28-03-17}$

'Ασκηση 2.12.

$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη

$x^* \in \mathbb{R}$ τ.ω $\phi(x^*) = x^*$ και $\phi'(x^*) = 0$

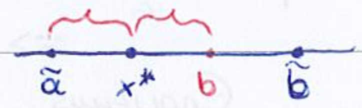
ΝΔΟ : Υπάρχει $[a,b]$ με μέσο το x^*

τ.ω η ϕ συστολή στο $[a,b]$

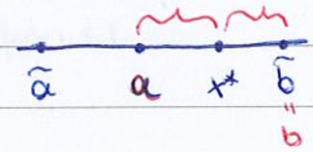
και $\phi : [a,b] \to [a,b]$.

Απόδειξη.

Αφού $\phi'(x^*) = 0$ και η ϕ' είναι συνεχής, υπάρχει ένα διάστημα $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ τ.ω $\tilde{a} < x^* < \tilde{b}$ και $\max\limits_{\tilde{a} \le x \le \tilde{b}} |\phi'(x)| < 1$



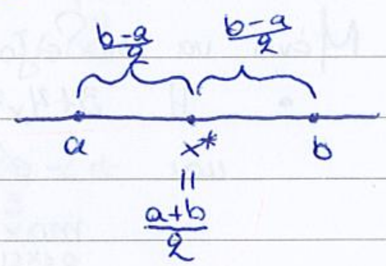
Επομένως, υπάρχει ένα διάστημα $[a,b]$ υποδιάστημα του $[\tilde{a}, \tilde{b}]$, με μέσο το x^*, και



① $\max\limits_{a \le x \le b} |\phi'(x)| = L < 1$

Επομένως, η ϕ είναι συστολή στο $[a,b]$

Τώρα,



② $x \in [a,b] \iff |x - x^*| \le \frac{b-a}{2}$

Έστω, $x \in [a,b]$. Τότε,

$$\phi(x) - x^* = \phi(x) - \phi(x^*)$$

$$\Rightarrow |\phi(x) - x^*| = |\phi(x) - \phi(x^*)| \underset{①}{\le} L|x - x^*| \le |x - x^*|$$

$$\le \frac{b-a}{2}$$

$$|\phi(x) - x^*| \le \frac{b-a}{2}$$

Σύμφωνα με τη ② έχουμε $\phi(x) \in [a,b]$. $\phi : [a,b] \to [a,b]$