25/2/2016

2ο κεφάλαιο

Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων.

- **Δεδομένα**: συνάρτηση f μιας πραγματικής μεταβλητής, με τιμές στο $\mathbb{R}$.
- **Ζητούμενο**: x^* στο πεδίο ορισμού της f τ.ω $f(x^*)=0$.

Αριθμητικές μέθοδοι: Γενικά δίνουν μία ακολουθία προσεγγίσεων $x_1, x_2, \dots$, η οποία, υπό κατάλληλες προϋποθέσεις συγκλίνει σε μία ρίζα x^* της f.

Κατά κανόνα επιλέγουμε μια προσέγγιση x_N, για κάποιο N αρκετά μεγάλο, με βάση εμπειρικά κριτήρια.

Συμβολισμός: $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα $C(I) := \{f \; I \to \mathbb{R} / f$ συνεχής$\}$

$n \in \mathbb{N}$

$C^n(I) = \{f \in C(I) : f$ n φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $I\}$

Αντί για $C([a,b])$ γράφουμε απλούστερα $C[\alpha,b]$, παρόμοια γράφουμε $C^n[\alpha,b]$, $C^n(a,b)$ κλπ.

Η μέθοδος της διχοτόμησης

Η μέθοδος αυτή βασίζεται στο θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

Έστω $g \in C[a,b]$ και ένας αριθμός μεταξύ των $g(a)$ και $g(b)$. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $g(x)=k$.

Ιδέα της μεθόδου

Δεδομένα: $f \in C[a,b]$, $sgn(f(a)) \neq sgn(f(b))$.

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & , x>0 \\ -1 & , x<0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

Διακρίνω 3 περιπτώσεις:

1η περίπτωση

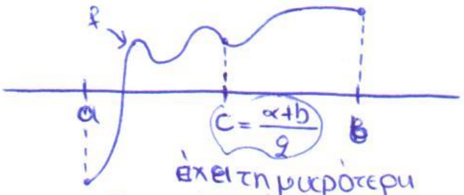
$f(a)=0 \rightarrow a$ ρίζα

2η περίπτωση

$f(b)=0 \rightarrow b$ ρίζα

3η περίπτωση

Αν δεν ισχύει καμμία από τις δύο πρώτες περιπτώσεις τότε, $f(a)\cdot f(b)<0$



έχει τη μικρότερη δυνατή απόσταση από τα 2 άκρα.

Περιπτώσεις

α) Αν $f(c)=0$, τότε το c είναι ρίζα της f

β) Αν $f(c)\neq 0$, τότε (2 περιπτώσεις)

i) Αν $f(a)\cdot f(c)<0$, τότε υπάρχει ρίζα της f στο $[a,c]$

ii) Αν $f(a)\cdot f(c)>0$, τότε $f(b)\cdot f(c)<0$ οπότε υπάρχει ρίζα της f στο $[c,b]$

Τα διαστήματα $[a,c]$, $[c,b]$ έχουν μήκος το μισό του μήκους του $[a,b]$.

Δεδομένα Αλγορίθμου: a, b, f τω $sng(f(a)) \neq sng(f(b))$
$f\in C[\alpha,b]$ και $\varepsilon>0$
μέγιστο σφάλμα (επιτρεπτό)
ή ανοχή σφάλματος.

Αν $x^*\in[a,b]$, τότε $\left|x^*-\frac{1}{2}(a+b)\right| \leq \frac{b-a}{2}$

Αλγόριθμος

Υπολόγισε $f(a)$, $\delta=b-a$ (μήκος διαστήματος)

1. $\delta \leftarrow \delta/2$

Αν $\delta\leq\varepsilon$, τότε τύπωσε a, b. Έξοδος

Διαφορετικά ($\delta>\varepsilon$):

υπολόγισε $c=\frac{1}{2}(a+b)$, $f(c)$

τύπωσε $a, b, c, \delta, f(c)$

Αν $f(c)=0$, έξοδος.

Διαφορετικά ($f(c)\neq 0$):

Αν $sgn(f(c))=sgn(f(\alpha))$:

$a\leftarrow c$

$f(a)\leftarrow f(c)$

Διαφορετικά ($sgn(f(c))\neq sgn(f(a))$)

$b\leftarrow c$

~~f(b) ← f(c)~~

πήγαινε στο 1

Πρακτικά ζητήματα για τον
αλγόριθμο της μεθόδου της διχοτόμησης.

1. Το ερώτημα κατά πόσον $sgn(f(a)) = sgn(f(c))$ δεν πρέπει να τίθεται στη μορφή $f(a)\cdot f(c) > 0$, γιατί μπορεί να οδηγήσει σε υπερχείλιση, όταν το $[a,b]$ είναι μικρό.

2. Το $c = \frac{a+b}{2}$, καλό είναι να υπολογίζεται ως $c = a + \frac{b-a}{2}$ ← αφαίρεση σχεδόν ίσων αριθμών. Δεν είναι ευαίσθητο σε σφάλματα στρογγύλευσης

γιατί διαφορετικά μπορεί να οδηγηθούμε σε σημείο έξω από το διάστημα $[a,b]$.

Παράδειγμα

$B=10,\ t=2,\ -L=U=10$ αποκοπή, $a=0.61,\ b=0.66$ αριθμοί μηχανής τα a,b

$fl(fl(a)+fl(b)) = fl(a+b) = fl(1.27) = 1.2$

$\frac{1.2}{2} = 0.6 < a$ είμαστε έξω από το διάστημα.

3. Πολύ μικρή ανοχή σφάλματος ε μπορεί να οδηγήσει σε φαύλο κύκλο.

$c = a + \frac{b-a}{2}$ αν είναι πολύ μικρός το $c \approx a$. Ωφείλεται στο ότι το 2 είναι πολύ μικρό σχετικά με το a.

~~Αν $fl(fl(a)+fl(b)) = c$~~

Αν $fl(c+fl(\epsilon)) = c$ τότε παίρνουμε $c=a$

$\propto$

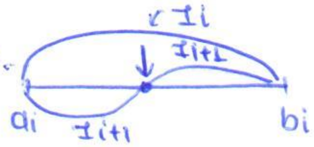
01/3/2016

Πρόταση (Εκτίμηση του σφάλματος της μεθόδου της διχοτόμησης)

Έστω $f \subset C[a,b]$ με $sgn(f(a)) \neq sgn(f(b))$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία των προσεγγίσεων (δηλαδή των μέσων των διαδοχικών διαστημάτων) που δίνει η μέθοδος της διχοτόμησης. Τότε, είτε $x^* = x_N$ για κάποιο N, είτε $x_n \to x^*$, για $n \to \infty$, όπου x^* είναι μία ρίζα της f. Μάλιστα ισχύει $|x^* - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n}$, $n=1,2,\ldots$

Απόδειξη

Θέτουμε $a_1 = a$ και $b_1 = b$ και συμβολίζουμε με $I_i = [a_i, b_i]$ $i=1,2,\ldots$ τα διαδοχικά διαστήματα που δίνει η μέθοδος της διχοτόμησης.



Προφανώς $I_{i+1} \subset I_i$ για κάθε i, και σε κάθε διάστημα I_i υπάρχει μία ρίζα της f. Άρα, υπάρχει μία ρίζα x^* της f που περιέχεται σε όλα τα I_i. Τώρα με $x_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$

έχουμε $x^* \in I_n$, οπότε $\boxed{|x^* - x_n| \leq \frac{b_n - a_n}{2}}$

Αλλά, $b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{4} = \ldots = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$.

Επομένως, $|x^*-x_n| \le \frac{b_n-a_n}{2} = \frac{b_1-a_1}{2^n}$.

Όμως $\frac{b-a}{2^n} \to 0$ για $n\to\infty$ οπότε $|x^*-x_n| \to 0, n\to\infty$ δηλαδή $x_n \to x^*, n\to\infty$ (αυτό που κάναμε πιο πάνω στην απόδειξη)

σφάλμα

Αν θέλουμε $|x^*-x_n| \le \varepsilon$ αρκεί να έχουμε $\frac{b-a}{2^n} \le \varepsilon \Leftrightarrow \frac{b-a}{\varepsilon} \le 2^n$

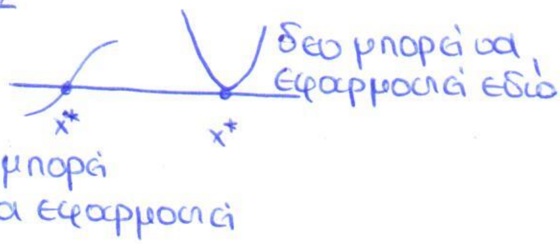
$\Leftrightarrow \log\frac{b-a}{\varepsilon} \le \log 2^n \Leftrightarrow \boxed{n \ge \frac{\log\frac{b-a}{\varepsilon}}{\log 2}}$

Αν κάνεις αρκετά βήματα τότε έχεις εξασφαλίσει ότι το σφάλμα είναι σχεδόν ε!

Πλεονεκτήματα

1. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί υπό γενικές συνθήκες στην f, απαιτεί μόνο συνέχεια της f και αλλαγή προσήμου της f σε μία περιοχή μίας ρίζας της.

πχ



2. Συγκλίνει πάντα όταν μπορεί να εφαρμοστεί.

3. Απαιτεί τον υπολογισμό μίας μόνο τιμής της f σε κάθε βήμα. (Είναι όταν υπολογίζουμε το μέσο του διαστήματος).

4. Μπορούμε να προσδιορίσουμε εκ των προτέρων ένα πλήθος βημάτων που εξασφαλίζει τη προσέγγιση μίας ρίζας με μία προκαθορισμένη ακρίβεια.

Αφού βρω το x_n βλέπω πως πάει η προσέγγιση (εκ των υστέρων)

Μειονεκτήματα

όταν η πολύ μεγάλο. 1Ε τότε πρέπει να κάνω πολλές πράξεις.

Η μέθοδος συγκλίνει αργά, με αποτέλεσμα το συνολικό κόστος να είναι υψηλό.

Στην πράξη χρησιμοποιείται ~~για~~ ως ένας λογικός εντοπισμός μίας ρίζας.

Επαναληπτικές μέθοδοι

Ιδέα: Γράφουμε μία εξίσωση $f(x)=0$ ισοδύναμα στη μορφή $\boxed{x=\phi(x)}$ (αυτό μπορεί να γίνει κατά πολλούς τρόπους)

Το αρχικό πρόβλημα προσδιορισμού μίας ρίζας της f ανάγεται στον προσδιορισμό ~~του~~ ενός σταθερού σημείου της συνάρτησης ϕ. Με μία αρχική προσέγγιση x_0, ορίζουμε τότε μία ακολουθία προσεγγίσεων $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αναδρομικά ως εξής: $x_n=\phi(x_{n-1})$ $n=1,2,\dots$

Ορισμός (Σταθερό σημείο)

Ένα σημείο x^* του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης ϕ λέγεται σταθερό σημείο της φ αν $\phi(x^*)=x^*$.

Ερώτημα: $x_n=\phi(x_{n-1}), n\in\mathbb{N}_0$. Έστω $x_n\to x^*$, $n\to\infty$. Είναι το x^* σταθερό σημείο της φ? (μπορώ να το προσεγγίσω?)

Λύση

θέλω να προκύψει το x^* όπότε βάζω το όριο μέσα.

$$x^*=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\phi(x_{n-1})=\phi(\lim_{n\to\infty}x_{n-1})=\varphi(x^*) \blacksquare$$

πρέπει η ϕ να είναι συνεχής στο x^* για να το κάνουμε αυτό το όριο δηλαδή μέσα

Υπόθεση που πρέπει να κάνουμε.

Πρόταση (ύπαρξη σταθερού σημείου) — όχι στο $\mathbb{R}$ όπως συνήθως

κάθε συνεχής συνάρτηση $\varphi:[a,b]\to[a,b]$ έχει (τουλάχιστον) ένα σταθερό σημείο στο $[a,b]$.

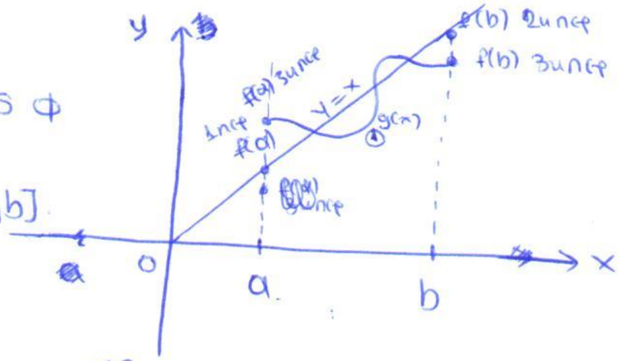
Δεν είναι αναγκαία η συνθήκη.

Απόδειξη

Διακρίνω 3 περιπτώσεις:

- $\varphi(a)=a \to a$ σταθερό σημείο της φ
- $\varphi(b)=b \to b$ σταθερό σημείο της φ
- Αν δεν ισχύει καμία από τις δύο προηγούμενες σχέσεις τότε, $\varphi(a)>a$ και $\varphi(b)<b$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\varphi(x)-x$
κάθε ρίζα της g είναι σταθερό ~~της φ~~ σημείο της φ και αντίστροφα.
Αρκεί νδο η g έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[a,b]$.
Η g είναι συνεχής και $g(a)=\varphi(a)-a>0$ και $\varphi(b)=\varphi(b)-b<0$. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής η g έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[a,b]$ ∎



$=g(x)$ ① γιατί πάω από το f(a) 3η περ στο f(b) 3η περίπτωση αναγκαστικά θα ακουμπήσω την $y=x$.

Ορισμός (Συνθήκη του Lipschitz, συστολή)

Μία συνάρτηση $f: I\to\mathbb{R}$ με I ένα διάστημα, λέμε ότι ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz στο I, αν υπάρχει $L>0$ τέτοιο ώστε

(*) $$\forall x,y\in I \quad |f(x)-f(y)|\le L|x-y|$$

Αν ισχύει η σχέση (*) με $L<1$ τότε η συνάρτηση f λέγεται συστολή στο I.

το L είναι ίδιο για όλα τα x,y. ανεξάρτητα από αυτά.

Μικραίνει η απόσταση ανάμεσα στα x,y

Παρατηρήσεις

Συνθήκη του Lipschitz συνεπάγεται την συνέχεια.

- Η συνθήκη του Lipschitz μπορεί να ικανοποιείται χωρίς η συνάρτηση να είναι συνεχώς παραγωγίσιμη.

πχ

$\varphi(x)=x,\ x\in\mathbb{R} \quad (L=1)$

• Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο I, τότε από την ⊛ έπεται ότι $|f'(\xi)| \leq L$ για $\xi \in I$

• Αν η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και ισχύει $|f'(\xi)| \leq L$ για κάθε $\xi \in I$ τότε ικανοποιείται η ⊛.

Απόδειξη

Υποθέτω $x \neq y$. $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\xi) \Rightarrow |f(x)-f(y)| = \underbrace{|f'(\xi)|}_{\leq L \text{ από υπόθεση}} |x-y|$

με ξ μεταξύ x και y

$\Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$. ■

• $f \in C^1[a,b]$ (1 φορά παρ/μη). Τότε $\max_{a \leq \xi \leq b} |f'(\xi)| = M$. Τότε η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz στο $[a,b]$ με $L = M$.

• Όταν η $\phi \in C^1(a,b) \not\Rightarrow$ συνθήκη του Lipschitz.

Αντιπαράδειγμα

$f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$. Δεν είναι παρ/μη στο μηδέν.

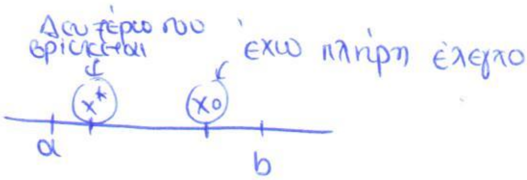
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $|f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to \infty$ όταν $x \to 0$

Θεώρημα (της συστολής)

Έστω $\phi : [a,b] \to [a,b]$ μία συστολή με σταθερά L (<1). Τότε η ϕ έχει στο $[a,b]$ ακριβώς ένα σταθερό σημείο x^*. Για τυχαία αρχική τιμή $x_0 \in [a,b]$, η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $x_n = \phi(x_{n-1})$ $n \in \mathbb{N}$ είναι καλά ορισμένη, συγκλίνει στο x^*, και για τα σφάλματα $x^* - x_n$ ισχύουν οι εκτιμήσεις:

(1) $|x_n - x^*| \leq L^n |x_0 - x^*|$

$\leq L^n \max(x_0 - a, b - x_0)$

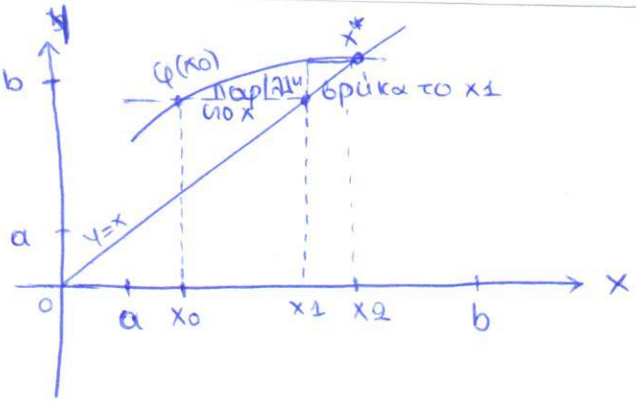


(2) $|x_n - x^*| \le \frac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|$

και

(3) $|x_n-x^*| \le \frac{L}{1-L}|x_n-x_{n-1}|$ μικρότερο φράγμα από το $|x_1-x_0|$

Η (3) είναι εκτίμηση εκ των υστέρων.
Η (1), (2) -//- -//- εκ των προτέρων



Βρίσκω το φ(x0). Φέρνω // στον x και στο σημείο που βρίσκω στο y=x εκεί είναι το x1. Και συνέχεια με τον ίδιο τρόπο.

Απόδειξη

• Μοναδικότητα

Έστω $x^*, y^* \in [a,b]$, $x^*\ne y^*$ τ.ω $\varphi(x^*)=x^*$ και $\varphi(y^*)=y^*$. Τότε $x^*-y^*=\varphi(x^*)-\varphi(y^*) \Rightarrow$

$|x^*-y^*| = |\varphi(x^*)-\varphi(y^*)| \le \underbrace{L}_{<1}|\underbrace{x^*-y^*}_{\ne 0}| < |x^*-y^*|$, άτοπο!

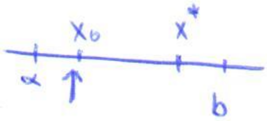
• Ύπαρξη + (1)

Η ύπαρξη έπεται από την προηγούμενη πρόταση (η φ είναι συνεχής αφού είναι συστολή) ? Αφού $x_0\in[\alpha,b]$ και $\phi:[\alpha,b]\to[\alpha,b]$ θα έχουμε $x_1 = \phi(x_0)\in[\alpha,b]$.
Επαγωγικά ότι $x_n \in [\alpha,b]$, $n\in\mathbb{N}_0$ και η ακολουθία είναι καλά ορισμένη. !

Τώρα, $x_n - x^* = \phi(x_{n-1}) - \phi(x^*) \Rightarrow |x_n-x^*| = |\varphi(x_{n-1})-\varphi(x^*)| \le L|x_{n-1}-x^*|$

$|x_n-x^*|\le L|x_{n-1}-x^*|$. Επαγωγικά συμπεραίνουμε ότι $|x_n-x^*|\le L^n|x_0-x^*|$, $n\in\mathbb{N}_0$.

■ αποδ. πριν το max.



Αλλά $|x_0-x^*|\le \max(x_0-\alpha, b-x_0)$. Αφού $L^n\to 0$, $n\to\infty$ συμπεραίνουμε $x_n\to x^*$, $n\to\infty$ ■ αποδ. (1) σχέσης.

Θα αποδείξουμε ξανά ύπαρξη.

Ύπαρξη + (2)

Η ακολουθία είναι καλά ορισμένη και $x_n\in[\alpha,b]$, $n\in\mathbb{N}_0$

Ισχυρισμός: Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι ακολουθία Cauchy.

Απόδειξη

Έχουμε. $x_m - x_{m-1} = \phi(x_{m-1})-\phi(x_{m-2}) \Rightarrow$ (από τον ορισμό)

$|x_m-x_{m-1}| = |\phi(x_{m-1})-\phi(x_{m-2})| \le L|x_{m-1}-x_{m-2}|$

τι σημαίνει ότι μία ακολουθία συγκλίνει?
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $a_n\to a$ όριο, $n\to\infty$:
$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\ge N$
$|a_n-a|\le\varepsilon$
Αν n όσο μεγάλο θέλω η διαφορά $|a_n-a|\le\varepsilon$ όσο πιο μικρό.

Επαγωγικά συμπεραίνουμε ότι $\boxed{|x_m - x_{m-1}| \leq L^{m-1}|x_1 - x_0|}$ (*)

Δεν φέρω το όριο εδώ.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ή ακολουθία Cauchy ⇔ τότε ↓↓

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N : |a_n - a_N| < \varepsilon$

Θεώρημα $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy

Άρα, για $n\in\mathbb{N}_0$ και $k\in\mathbb{N}_0$ έχουμε

$$\underbrace{x_{n+k}}_{=x_m \text{ του τύπου (ουσιαστικά } m=n+k)} - x_n = (x_{n+k} - x_{n+k-1}) + (x_{n+k-1} - x_{n+k-2}) + \ldots + (x_{n+1} - x_n)$$

$$\Rightarrow |x_{n+k} - x_n| \overset{\text{τριγ. ανισότητα}}{\leq} |\overset{n}{\widetilde{x_{n+k}}} - \overset{n-1}{\widetilde{x_{n+k-1}}}| + |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n|$$

οι δείκτες τώρα είναι διαδοχικοί

$$\overset{(*)}{\leq} L^{n+k-1}|x_1 - x_0| + L^{n+k-2}|x_1 - x_0| + \ldots + L^n|x_1 - x_0|$$

$$= L^n\underbrace{(L^{k-1} + L^{k-2} + \ldots + 1)}_{\frac{1-L^k}{1-L}}|x_1 - x_0|$$

$$1+\omega+\omega^2+\ldots+\omega^{k-1} = \frac{1-\omega^k}{1-\omega}$$

Δεν θέλουμε να έχουμε k

Άρα, $|x_{n+k} - x_n| \leq L^n \frac{1-L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$

$$\leq L^n \frac{1}{1-L}|x_1 - x_0|$$

$$S = 1+\omega+\ldots+\omega^{k-1}$$
$$\omega S = \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^k$$
$$S - \omega S = 1 - \omega^k \Rightarrow$$
$$S_k = \frac{1-\omega^k}{1-\omega}$$

Συμπέρασμα,
$|x_{n+k} - x_n| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$, $n,k\in\mathbb{N}_0$

Το δεξιό μέλος τείνει στο μηδέν καθώς το $n\to\infty$, οπότε η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι όντως ακολουθία Cauchy. Επομένως, η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ συγκλίνει. Συμβολίζουμε με x^* το όριό της. Επειδή, $a\leq x_n$, $n\in\mathbb{N}_0$, θα έχουμε $x^*\geq a$ και επεπλέον αντίστοιχα $x^*\leq b$. Συμπέρασμα, $x^*\in[a,b]$ ∎

Cauchy ότι είναι

Ισχυρισμός: Το x^* είναι σταθερό σημείο της ϕ.

Απόδειξη

ϕ συνεχής στο x^*, συνεπώς είναι

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\phi(x_{n-1}) \overset{\swarrow}{=} \phi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = \phi(x^*)$$ ∎ σταθερό σημείο

Για τη (2) $|\underbrace{x_{n+k}}_{\text{συγκλίνει στο } x^* \text{ όταν } k\to\infty} - x_n| \le \frac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|$

$$|x^*-x_n| \le \frac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|$$ ■ απόδειξη (2) θεωρήματος

Απόδειξη της (3)

Θέτω $y_0 := x_{n-1}$ και $y_1 = \varphi(y_0) = \varphi(x_{n-1}) = x_n$

Σύμφωνα με την (2) για τα y_1, y_0 έχουμε,

$$|y_1 - x^*| \le \frac{L^1}{1-L}|y_1-y_0|$$

Δηλαδή, $|x_n - x^*| \le \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}|$ ■ απόδειξη (3).

Παρατηρήσεις

α) Η (3) είναι εκτίμηση εκ των υστέρων (x_n χρειάζεται και στα δύο μέλη), οι (1),(2) είναι εκτιμήσεις εκ των προτέρων.

β) Η (3) είναι καλύτερη της (2): έχουμε $|x_n - x_{n-1}| \le L^{n-1}|x_1-x_0|$ από (2η) σχέση ⊙

οπότε $\frac{L}{1-L}\underbrace{|x_n-x_{n-1}|}_{\text{φράγμα στην (3)}} \le \frac{L}{1-L}|x_1-x_0| = \frac{L^n}{1-L}\underbrace{|x_1-x_0|}_{\text{φράγμα στην (2)}}$

γ) το πρώτο φράγμα στην (1) δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμο γιατί χρησιμοποιεί το άγνωστο x^*.

Ερώτηση

~~Πόσο μεγαλύτερο~~

Πόσο το πολύ μεγαλύτερο είναι το φράγμα της (2) (το δεξιό μέλος) από το πρώτο φράγμα της (1) ?

Απάντηση

Έχουμε, $x_1 - x_0 = \overbrace{(x_1 - x^*)}^{\text{από ορισμός}} + (x^* - x_0) = \varphi(x_0) - \varphi(x^*) + (x^* - x_0)$

$\Rightarrow |x_1 - x_0| \le \underbrace{|\varphi(x_0) - \varphi(x^*)|}_{\le L|x_0 - x^*|} + |x^* - x_0|$

$\Rightarrow |x_1 - x_0| \leq (L+1)|x^* - x_0|$

Άρα $\frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| \leq \frac{L^n}{1-L}(L+1)|x^* - x_0| = \frac{L+1}{1-L}\left(L^n |x^* - x_0|\right)$

Συμπέρασμα, το φράγμα της (2) είναι το πολύ $\frac{1+L}{1-L}$ φορές το πρώτο φράγμα της (1).

δ) $L<1$, έστω $\varphi : [-1,1] \to [-1,1]$, $\varphi(x) = -x$. Τότε $\varphi(x) - \varphi(y) = -x - (-y) =$ $= -(x-y) \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| = |x-y|$. Άρα η φ ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz με $L=1$.

Απόδειξη

Έστω $x_0 \in [-1,1]$, $x_0 \neq 0$. Τότε η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, είναι $x_0, -x_0, x_0, -x_0, x_0, \ldots$ προφανώς αυτή η ακολουθία δεν συγκλίνει ■ απόδειξη ότι το $L<1$ είναι απαραίτητο

Ταχύτητα σύγκλισης ακολουθιών

Υπόθεση $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $x_n \to x^*$, $n \to \infty$

Τάξη σύγκλισης της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, λέγεται ο μεγαλύτερος αριθμός $p \geq 1$, τ.ω να ισχύει:

Όσο πιο μεγάλη είναι η τάξη τόσο πιο μεγάλη είναι η ταχύτητα

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^p$$

όσο πιο μεγάλο είναι το p τόσο πιο ~~μεγάλη~~ γρήγορη είναι η σύγκλιση

με μία σταθερά C (ανεξάρτητη του N) για αρκετά μεγάλα n.

(Στην περίπτωση $p=1$, ζητούμε ακόμα να ισχύει $C<1$)

Αν το $C>1$ η απόσταση δεν θα μικραίνει.

■ περιγραφικά ο ορισμός

Ορισμός

Λέμε ότι η τάξη σύγκλισης της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι (τουλάχιστον) ένα ή ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ συγκλίνει (τουλάχιστον) γραμμικά, αν υπάρχει σταθερά $C<1$ τ.ω

$$|x_{n+1}-x^*| \le C|x_n-x^*| \text{ για } n\ge N, \text{ με } N \text{ αρκετά μεγάλο.}$$

Η τάξη σύγκλισης είναι (τουλάχιστον) p (>1) αν $\exists$ σταθερά C τ.ω

$$|x_{n+1}-x^*| \le C|x_n-x^*|, n\in\mathbb{N}.$$

Παρατηρήσεις

Έστω ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ συγκλίνει στο x^* με τάξη (τουλάχιστον) $p>1$. Τότε συγκλίνει και με οποιαδήποτε τάξη q με $1\le q\le p$

Ξέρουμε ότι, $|x_{n+1}-x^*| \le C|x_n-x^*|^{p}$ → θέλω να το κάνω q

$$\Rightarrow |x_{n+1}-x^*| \le C\,|x_n-x^*|^{(p-q)\ge 0}\,|x_n-x^*|^q$$

→ 0 όταν $n\to\infty$. άρα είναι φραγμένο. άρα $\exists$ άλλη σταθερά

$$\Rightarrow |x_{n+1}-x^*| \le \tilde{C}|x_n-x^*|^q$$ (στην περίπτωση $q=1$, μπορούμε το C να το επιλέξουμε <1)

$\propto$

Παρατήρηση (Προσδιορισμός της τάξης σύγκλισης)

$|x_{n+1}-x^*| \le C\cdot|x_n-x^*|^p$. Ενδιαφέρουσα περίπτωση: $x_n\ne x^*$, $n\in\mathbb{N}$ τότε διαιρώντας με το $|x_n-x^*|^p$ γράφουμε ισοδύναμα την παραπάνω σχέση στη μορφή

$$\left|\frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p}\right| \le C$$. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $\dfrac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p}$ είναι φραγμένη.

Υπόθεση

$\dfrac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p} \to a$, $n\to\infty$. Τότε η ακολουθία είναι φραγμένη και η τάξη σύγκλισης της είναι τουλάχιστον p (για $p=1$ απαιτούμε $|\alpha|<1$).

Ισχυρισμός

πριν λέγαμε τουλάχιστον

Αν $\alpha\neq 0$, τότε η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς p.

Απόδειξη → θα υποθέσω $p+1 \Rightarrow$ Άτοπο

Πράγματι, αν η τάξη ήταν $p+\epsilon$ ($\epsilon>0$), τότε θα έχουμε,

$$|x_{n+1}-x^*| \le C|x_n-x^*|^{p+\epsilon} \Rightarrow \underbrace{\left|\frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p}\right|}_{\downarrow \; |\alpha|} \le \underbrace{C\cdot|x_n-x^*|^{\epsilon}}_{\downarrow \; 0,\ \text{αφού } x_n\to x^*}$$

$|\alpha| \le$

$\Rightarrow \alpha=0$ άτοπο ∎

08/3/2016

Υποθέσεις: Όπως στο θεώρημα της συστολής ($\varphi:[\alpha,b]\to[\alpha,b]$, συστολή)

Ερώτηση: τι μπορούμε να πούμε για την τάξη σύγκλισης της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

Απόδειξη

Ξέρουμε ότι ισχύει $|x_{n+1}-x^*| \le L|x_n-x^*|$, $n\in\mathbb{N}_0$

Άρα, η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον ένα.

Επιπλέον υπόθεση

Η φ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[\alpha,b]$

Τότε, $x_{n+1}-x^* = \varphi(x_n)-\varphi(x^*)$

$= \varphi'(\xi_n)(x_n-x^*)$ με ξ_n ένα σημείο μεταξύ x_n και x^*.

Επομένως, $\dfrac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*} = \varphi'(\xi_n)$ οπότε $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*} = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi'(\xi_n) = \varphi'(x^*)$

$$\lim \frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*} = \varphi'(x^*).$$

Επομένως, αν $\varphi'(x^*) \neq 0$ τότε η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς ένα.

Συμπέρασμα. Αν θέλουμε να κατασκευάσουμε μεθόδους $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ με τάξη σύγκλισης υψηλότερη του ένα, πρέπει να φροντίσουμε να ισχύει $\boxed{\varphi'(x^*)=0}$ ■

Η μέθοδος του Νεύτωνα

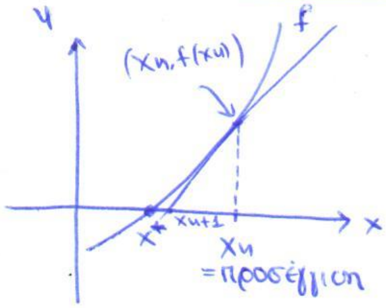
Έστω x^* ρίζα μίας συνάρτησης f. Έστω x_n προσέγγιση της x^*. Ορίζουμε μία νέα προσέγγιση x_{n+1} της x^* ως εξής:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Για να ορίζεται η x_n πρέπει να $\exists$ η $f'(x_n)$ και $f'(x_n) \neq 0$.

Η μέθοδος είναι επαναληπτική, δηλαδή $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, με συνάρτηση επανάληψης φ, $\boxed{\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$

• Γεωμετρικός τρόπος κατασκευής



Στο $(x_n, f(x_n))$ φέρνω εφαπτόμενη και εκεί που τέμνει τον x είναι το x_{n+1}.

Εξίσωση εφαπτομένης: $y = \alpha x + \beta \Rightarrow y = \alpha(x-x^*) + \alpha x^* + \beta = \beta^*$ μία άλλη σταθερά

το αφαιρούμε επειδή πριν το προσθέσαμε. την θέτω.

$\alpha = $ κλίση $= f'(x_n)$

$x \to x_n$, $y \to f(x_n)$ άρα το $\beta = ?$

Οπότε, $y = f(x_n) + (x - x_n) \cdot f'(x_n)$

Σε ποιό σημείο τέμνει η εφαπτομένη τον άξονα των x;

Για y=0, δηλαδή $f(x_n) + (x-x_n) f'(x_n) = 0$

$\neq 0$ υποθέτουμε

οπότε, $(x-x_n) + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = 0 \Rightarrow \boxed{x = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$ ■

• Αναλυτικός τρόπος κατασκευής

$f(x) = 0 \xRightarrow{\text{πολ/ζω με μια συνάρτηση} \neq 0} \underbrace{g(x)}_{\neq 0} f(x) = 0 \xRightarrow{\text{προσθέτω το } x} x = \underbrace{x + g(x) f(x)}_{\varphi(x)}$

Πώς πρέπει να επιλέξω την g έτσι ώστε $\varphi'(x^*) = 0$;

Έχουμε, (παραγωγίζουμε) $\varphi'(x^*) = 1 + g'(x^*) \underbrace{f(x^*)}_{=0} + g(x^*) \cdot f'(x^*)$

$\Rightarrow \varphi'(x^*) = 1 + g(x^*) f'(x^*)$

• $\varphi'(x^*) = 0 \Rightarrow 1 + g(x^*) f'(x^*) = 0 \Rightarrow g(x^*) = -\frac{1}{f'(x^*)}$

καλή σύγκλιση / κατάσταση σημαίνει τάξη σύγκλισης > 1. και είπαμε πως ότι πρέπει $\varphi'(x^*) = 0$

το x^* είναι άγνωστο

Λογική επιλογή: $g(x) = -\frac{1}{f'(x)}$.

τότε $\varphi(x) = x - \frac{1}{f'(x)} f(x)$. Έτσι προκύπτει η συνάρτηση επανάληψης της μεθόδου του Νεύτωνα, οπότε η $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ δίνει

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ ■

ξεκινάς κοντά στην ρίζα. ~~αναγκαστικά~~

$f'(x^*)$ στον παρανομαστή και αυτόματα χρειάζεται η απλή.

Θεώρημα (τοπική τετραγωνική σύγκλιση της μεθόδου του Νεύτωνα)

η f μηδενίζεται στο x^* αλλά όχι η f παράγωγος

έστω x^* απλή ρίζα μίας συνάρτησης f, δηλαδή $f(x^*) = 0$ και $f'(x^*) \neq 0$, και έστω ότι η f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του x^*. Τότε υπάρχει ένα κλειστό διάστημα I, με μέσον το x^*, τω για κάθε αρχική τιμή $x_0 \in I$, η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ που δίνει η μέθοδος του Νεύτωνα για την (8) εξίσωση $f(x) = 0$, δηλαδή

$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$ (*), $n \in \mathbb{N}_0$. να συγκλίνει στο x^*. Μάλιστα ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \quad (**)$$

δηλαδή η σύγκλιση είναι τουλάχιστον τετραγωνική. (Αν $f''(x^*) \neq 0$, τότε η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς δύο).

Απόδειξη

Η συνάρτηση επανάληψης $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ της μεθόδου του Νεύτωνα είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του x^*.

Επίσης,

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

ιδιαίτερα, $\varphi'(x^*) = 0$. Επομένως, υπάρχει ένα κλειστό διάστημα I, με μέσον το x^*, τ.ω. $\max_{x\in I} |\varphi'(x)| = L < 1$

$\Downarrow$

μπορώ να φτιάξω ξανά το διάστημα ώστε το x^* να είναι το μέσον? ΝΑΙ

Τώρα, για $x \in I$ έχουμε $\varphi(x) - x^* = \varphi(x) - \varphi(x^*)$

$$\Rightarrow |\varphi(x) - x^*| \leq L\,|x - x^*| \leq |x - x^*|,$$

οπότε $\varphi(x) \in I$.

Άρα, $\varphi: I \to I$ και είναι συστολή.

Σύμφωνα με το θεώρημα της συστολής, η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι καλά ορισμένη και συγκλίνει στο x^*. ■ αποδείξαμε την (*)

Μένει να αποδείξουμε την (**)

(Θέλω να πάω σε διαφορές άρα Taylor)

Αναπτύσσοντας την $f(x_n)$ και $f'(x_n)$ κατά Taylor ως πρός το x^*, έχουμε

$$f(x_n) = f(x^*) + (x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^2}{2} f''(\xi_{n1})$$

(2 φορές παρ/μη, μέχρι που θα φτάσω την taylor?)

$$f'(x_n) = f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})$$

με ξ_{n1}, ξ_{n2} μεταξύ των x_n και x^*

Άρα, $$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{(x_n-x^*)^2}{2} f''(\xi_{n1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})}$$

θα αφαιρέσω το

$\Rightarrow$ x^* αναγκαστικά

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{(x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{(x_n-x^*)^2}{2} f''(\xi_{n1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x^* = \frac{(x_n - x^*)^2 f''(\xi_{n2}) - \frac{(x_n-x^*)^2}{2} f''(\xi_{n1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})}$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{f''(\xi_{n2}) - \frac{1}{2} f''(\xi_{n1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{f''(x^*) - \frac{1}{2} f''(x^*)}{f'(x^*)} = \frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$ ■ τέλος (**)

<u>Παρατηρήσεις</u>

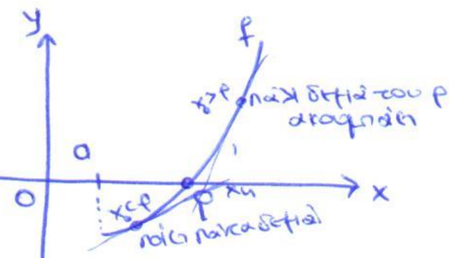
- $|x_{n+1} - x^*| \le C |x_n - x^*|^2$

- Το διάστημα I δεν είναι γνωστό και μπορεί να έχει μικρό μήκος. <u>Συνέπεια</u>, η μέθοδος του Νεύτωνα να χρησιμοποιείται σπάνια μόνη της. Συνήθως συνδιάζεται με μία μέθοδο του τύπου της διχοτόμησης η οποία μας δίνει προσέγγιση αρκετά κοντά στη ρίζα, και εν συνεχεία εφαρμόζουμε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να επιταχύνουμε τη σύγκλιση.

Πρόταση (ολική σύγκλιση της μεθόδου του Νεύτωνα)

μηδέν

Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση τ.ω $f(a) < 0$ και $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ για $x \geq a$. Τότε η f έχει στο $[a, \infty)$ ακριβώς μία ρίζα ρ. Για οποιαδήποτε αρχική τιμή $x_0 \geq a$ η ακολουθία που δίνει η μέθοδος του Νεύτωνα συγκλίνει στη ρ (Τάξη σύγκλισης $= 2$)



↳ το αποδείξαμε στο προηγούμενο θεώρημα

Απόδειξη

Μοναδικότητα:

Η f είναι $\underbrace{\text{γνησίως αύξουσα}}_{f'(x)>0 \text{ υπόθεση}}$, οπότε έχει το πολύ μία ρίζα. ■

Ύπαρξη:

$f(a) < 0$, f συνεχής. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(b) > 0$ για κάποιο $b > a$.

Απόδειξη

Έχουμε, (taylor) $f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \underbrace{\frac{(b-a)^2}{2} f''(\xi)}_{>0}$ με $\xi \in (a, b)$.

Έχουμε, $f(b) > f(a) + (b-a) f'(a)$

αρκεί επομένως να ισχύει $f(a) + (b-a) f'(a) > 0$

δηλαδή $b > a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$ ■ ύπαρξη

Συμπέρασμα, Η f έχει ακριβώς μία ρίζα $\rho > a$.

Σύγκλιση:

$f(x) < 0$ για $x < \rho$
$f(x) > 0$ για $x > \rho$
(βλέπε σχήμα)

Επίσης, για τη συνάρτηση επαναλήψης της μεθόδου του Νεύτωνα έχουμε

$$\varphi'(x^*) = \frac{f(x) \overbrace{f''(x)}^{>0}}{\underbrace{[f'(x)]^2}_{>0}}$$

Άρα, $x < \rho \Rightarrow \varphi'(x) < 0$

$x > \rho \Rightarrow \varphi'(x) > 0$

Τώρα, $x_{n+1}-\rho = \varphi(x_n)-\varphi(\rho)$

$= \varphi'(\xi_n)(x_n-\rho)$ με ξ_n μεταξύ x_n και ρ.

<u>Συμπέρασμα</u>: $x_n<\rho \Rightarrow x_{n+1}>\rho$

$x_n>\rho \Rightarrow x_{n+1}>\rho$.

<u>Συμπέρασμα</u>, μόνο για $n=0$ μπορεί να ισχύει $x_n<\rho$.

Άρα, $x_n>\rho$ για $n=1,2,\dots$

Όμως, για $n\geq 1$ $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n$

Άρα, η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα και φθίνουσα και φραγμένη από κάτω από το ρ.

<u>Συμπέρασμα</u>, Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε ένα σημείο $y\geq\alpha$. αλλά

$$\begin{array}{ccccc} x_{n+1} & = & x_n & - & \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ \updownarrow & & \downarrow & & \\ y & = & y & - & \dfrac{f(y)}{f'(y)} \end{array} \Rightarrow f(y)=0 \Rightarrow y=\rho$$ γιατί η f έχει ακριβώς μία ρίζα. ∎

<u>17/3/2016</u>

<u>Μέθοδος του Νεύτωνα</u>: Εξίσωση: $f(x)=0$, $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

<u>Ερώτημα</u>

Τι συμβαίνει στην περίπτωση πολλαπλής ρίζας;

<u>Παράδειγμα</u>

$f(x)=x^2$. ρίζα $x^*=0$ διπλή. $x_{n+1}=x_n-\dfrac{(x_n)^2}{2x_n}=\dfrac{x_n}{2} \Rightarrow$

$x_{n+1}-x^* = \dfrac{1}{2}(x_n-x^*) \Rightarrow \dfrac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^{p=1}}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{p=1}$ ∎

<u>Γενική περίπτωση</u>: x^* ρίζα πολ/τας m μιας συνάρτησης f:

$f(x^*)=f'(x^*)=\dots=f^{(m-1)}(x^*)=0$, $f^{(m)}(x^*)\neq 0$. (απλή ρίζα)

Θέλω να βρω για την τάξη σύγκλισης άρα πρέπει με διαφορές Taylor να εμφανίσω το x_n-x^*.

Έχουμε, $f(x_n) = \underbrace{\cancel{f(x^*)}}_{\text{από υπόθεση}}^{0} + (x_n - x^*)\cancel{f'(x^*)}^{0} + \dots + \frac{(x_n-x^*)^{m-1}}{(m-1)!}\cancel{f^{(m-1)}(x^*)}^{0} + \frac{(x_n-x^*)^m}{m!} f^{(m)}(\xi_{n1})$

(με ξ_{n1} μεταξύ x_n και x^*)

$$\Rightarrow f(x_n) = \frac{(x_n-x^*)^m}{m!} f^{(m)}(\xi_{n1})$$

Ανάλογα, $f'(x_n) = \frac{(x_n-x^*)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(\xi_{n2})$

Επομένως, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\frac{(x_n-x^*)^m}{m!} f^{(m)}(\xi_{n1})}{\frac{(x_n-x^*)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(\xi_{n2})}$ αφαιρώ x^* $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x^* = (x_n - x^*) - \frac{(x_n-x^*) f^{(m)}(\xi_{n1})}{m f^{(m)}(\xi_{n2})}$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*} = 1 - \frac{f^{(m)}(\xi_{n1})}{m f^{(m)}(\xi_{n2})} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*} = 1 - \frac{\cancel{f^{(m)}(x^*)}}{m \cancel{f^{(m)}(x^*)}} = 1 - \frac{1}{m} \neq 0$$

για $m \neq 1 \Rightarrow \boxed{p=1}$ ∎

<u>Υπόθεση</u>

Η πολ/τα μιας ρίζας x^* είναι γνωστή τότε η "παραλλαγή" της μεθόδου του Νεύτωνα $x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, συγκλίνει, για x_0 αρκετά κοντά στο x^* και η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον 2.

Αν φέρω πχ $m=3$ τότε το αντικαθιστώ αλλιώς από τον τύπο γενικά $m=1$

Σύνοψη

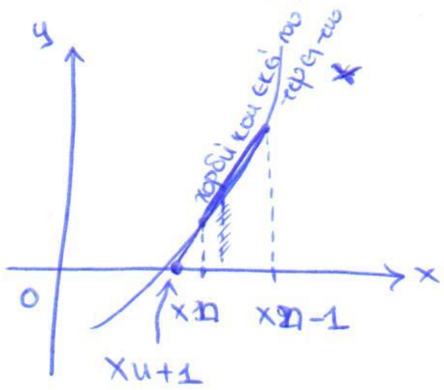
Η μέθοδος του Νεύτωνα συγκλίνει ταχύτατα, γενικά υπό τις προϋποθέσεις ότι η x_0 είναι αρκετά κοντά σε μία ρίζα x^*, ότι η x^* είναι απλή, και η f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του x^*.

Αν η παράγωγος είναι δύσκολο να υπολογιστεί καταφεύγουμε σε μεθόδους του τύπου του Νεύτωνα!

Η μέθοδος της τέμνουσας (προσεγγίζουμε το $f'(x_n)$ με $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}}$$

Γεωμετρική ερμηνεία



• Η μέθοδος της τέμνουσας δεν είναι επαναληπτική, με την έννοια ότι δεν μπορεί να γραφεί στη μορφή $\boxed{x_{n+1}=\varphi(x_n)}$.

• κόστος ανά βήμα

Ένας υπολογισμός της f ($f(x_n)$), το $f(x_{n-1})$ χρησιμοποιήθηκε και στο προηγούμενο βήμα.

Νεύτωνα
$f(x_n)$, $f'(x_n)$

Θεώρημα (τάξη σύγκλισης της μεθόδου του Νεύτωνα) (όχι απόδειξη)
Έστω x^* ρίζα μίας συνάρτησης f, και έστω ένα διάστημα $(a,b)\subset\mathbb{R}$ με $x^*\in(a,b)$, $f\in C^2(a,b)$ και $f'(x^*)\neq 0$, $f''(x^*)\neq 0$. Τότε $\exists$ ένα διάστημα I, που περιέχει το x^*, τ.ω για $x_0, x_1\in I$, η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που δίνει η μέθοδος της τέμνουσας να συγκλίνει στο x^*,

η τάξη σύγκλισης είναι (τουλάχιστον) $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$

Πώς εμφανίζεται το p?

ένα ευθύγραμμο τμήμα, |μήκους| = 1 αυτό ζητάω. Χρυσή τομή στην γεωμετρία

μεγάλο κομμάτι

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow 1-x = x^2$$

μεγάλο μέρος, μικρό μέρος

$$\Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$ (το αρνητικό απορρίπτεται)

αυτό είναι το μήκος $\boxed{x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

Έχω, $$\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2(-1-\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(-1-\sqrt{5})} = \frac{-2(1+\sqrt{5})}{(-1)^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{-2(1+\sqrt{5})}{1-5} = \frac{-2(1+\sqrt{5})}{-4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \blacksquare$$

Η μέθοδος της τέμνουσας χρησιμοποιείται στην πράξη συχνότερα από την μέθοδο του Νεύτωνα, επειδή χρησιμοποιεί μόνο την f και όχι την f'. Είναι λίγο βραδύτερη από την μέθοδο του Νεύτωνα (1.62 < 2) οπότε για να επιτύχουμε μία δεδομένη ακρίβεια πρέπει να κάνουμε περισσότερα βήματα με την μέθοδο της τέμνουσας από ότι με την μέθοδο του Νεύτωνα. Το συνολικό κόστος εξαρτάται από το κόστος υπολογισμού τιμών της f και της f'.

δεν είναι σωστό αυτό γενικά.

Υπόθεση

Το κόστος υπολογισμού των f και f' είναι το ίδιο.

Ερώτημα 1

Ποιά από τις δύο μεθόδους έχει συνολικά μικρότερο κόστος?

Παρατήρηση

Έστω η τάξη σύγκλισης μιας ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο x^* είναι p(n).

Ερώτημα 2

Ποια είναι η τάξη σύγκλισης της ακολουθίας (x_{2n}) ?

μπορώ και x_{2n+1}.

Απάντηση

$\tilde{x}_n = x_{2n}$

$|\tilde{x}_n - x^*| = |x_{2n} - x^*| \leq C|x_{2n-1} - x^*|^p$

$\Rightarrow \qquad \leq C(C|\underbrace{x_{2n-2}}_{\tilde{x}_{2n-1}} - x^*|^p)^p$

$\Rightarrow \quad |\tilde{x}_n - x^*| \leq C^{1+p}|\tilde{x}_{n-1} - x^*|^{p^2}$

Συμπέρασμα, τάξη p^2. ■ ερώτημα 2

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \approx 2.62 > 2$

Απάντηση: Η μέθοδος της τέμνουσας. ■