19/02/2014

Διαδικαστικά

- Θεωρία: Τρίτη - Πέμπτη 10:00 - 12:00
- Ασκήσεις: Παρασκευή 12:00 - 13:00

17 έως 21/03 → όχι μάθημα.

1η ΕΕ: Σάββατο 05/04/2014 (1ο, 2ο)

2η ΕΕ: Σάββατο 10/05/2014 (3ο)

3η ΕΕ: Σάββατο 31/05/2014 (4ο, 5ο)

Η ύλη του μαθήματος συνοπτικά:

1ο Κεφάλαιο: - Αριθμητική κινητής υποδιαστολής
- Σφάλματα στρογγύλευσης.
- Ευαισθησία αριθμητικών μεθόδων (και προβλημάτων) σε σφάλματα στρογγύλευσης.

2ο Κεφάλαιο: - Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

Ζητούνται ρίζες της f

3ο Κεφάλαιο: - Γραμμικά συστήματα.

Δεδομένα: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

↑

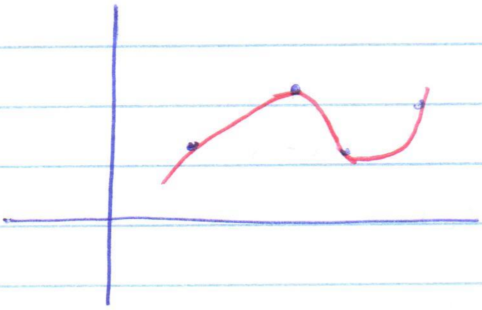
αντιστρέψιμος.

Ζητούμενο: $x \in \mathbb{R}^n$ τω $Ax = b$

4º Κεφάλαιο: Παρεμβολή

Δεδομένα: σημεία (x_i, y_i), $i = 1 \ldots n$

Ζητούμενο: Συνάρτηση "κατάλληλης μορφής" τ.ω. το γράφημά της να διέρχεται από τα (x_i, y_i)



6º Κεφάλαιο: Αριθμητική ολοκλήρωση.

$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ "ομαλή"

Ζητούμενο: $\int_a^b f(x)\,dx$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

$F' = f$ παράγουσα της f

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

1º Κεφάλαιο: Αριθμητική κινητής υποδιαστολής
Σφάλματα Στρογγύλευσης

να μην είναι ευαισθητες σε "σφάλματα στρογγ."

"Καλές" αριθμητικές μέθοδοι ⇒ καλά αριθμ. αποτελέσματα.
"Κακές" « « ⇒ άσχημα « «

Ποιότητα αριθμητικών μεθόδων:
1. Απαιτούμενος χρόνος
2. « μνήμη.

3. Ακρίβεια

Παραδείγματα!

$$I_n = \int_0^1 x^n \cdot e^{x-1}\, dx \quad , n \in \mathbb{N}$$

Ιδιότητες των I_n:

$x^{n+1} < x^n \quad \forall x \in (0,1)$ — όσο μεγαλώνει το n το x^n μικραίνει.

$\Rightarrow x^{n+1} \cdot e^{x-1} < x^n \cdot e^{x-1}$

$\Rightarrow \int_0^1 x^{n+1} \cdot e^{x-1}\, dx < \int_0^1 x^n \cdot e^{x-1}\, dx$

$\Rightarrow I_{n+1} < I_n$

$(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γνήσια φθίνουσα.
Επίσης, $I_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

$$I_n = \int_0^1 x^n \underbrace{\cdot e^{x-1}}_{\leq 1}\, dx \leq \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{0 < I_{n+1} < I_n \leq \frac{1}{n+1}}$$

Πως μπορούμε να υπολογίσουμε το I_n;

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1}\, dx = \int_0^1 x^n \left(e^{x-1}\right)'\, dx$$

$$= \left[x^n \cdot e^{x-1}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 (x^n)' \cdot e^{x-1}\, dx$$

$$= 1 - n \cdot \underbrace{\int_0^1 x^{n-1} \cdot e^{x-1}\, dx}_{I_{n-1}}$$

$I_n = 1 - n I_{n-1}$, $n \geq 2$

$I_1 = 1 - \int_0^1 e^{x-1}\,dx$ ($\rightarrow$ για $n=1$)

$= 1 - \left[e^{x-1}\right]_{x=0}^{x=1}$

$= \cancel{1} - (\cancel{1} - e^{-1}) = \frac{1}{e}$

$\begin{cases} I_n = 1 - n I_{n-1} \\ I_1 = \frac{1}{e} \end{cases}$, $n = 2, 3, \ldots$

(αναδρομικός τύπος)

$\tilde{I}_1 \approx I_1$ → προσέγγιση του I_1.

<u>Υπόθεση</u>: Όλες οι άλλες πράξεις γίνονται <u>ακριβώς</u>

$\tilde{I}_n = 1 - n \tilde{I}_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$

Είναι "ευσταθής" αυτός ο αλγόριθμος;

<u>Έχουμε</u>: $\boxed{I_n - \tilde{I}_n = -n(I_{n-1} - \tilde{I}_{n-1})}$ (+)

<u>Επαγωγικά</u>: $I_n - \tilde{I}_n = (-1)^{n-1} n! (I_1 - \tilde{I}_1)$ (*)

<u>Απόδειξη</u>: <u>$n=1$</u> η (*) είναι σωστή (αρχή της επαγωγής)

<u>Βήμα της επαγωγής</u>: $n \rightarrow n+1$:

Σύμφωνα με τη σχέση (+) ισχύει:

$$I_{n+1} - \tilde{I}_{n+1} = -(n+1)\underbrace{(I_n - \tilde{I}_n)}_{\overset{\text{υπόθεση επαγωγής}}{=} (-1)^{n-1} n! (I_1 - \tilde{I}_1)}$$

$$= (-1)^{\underset{(n+1)-1}{n}} (n+1)! (I_1 - \tilde{I}_1)$$

αποδείξαμε:

$$I_n - \tilde{I}_n = (-1)^{n-1}\, n!\, (I_1 - \tilde{I}_1)$$

$$\Rightarrow |I_n - \tilde{I}_n| = n!\, |I_1 - \tilde{I}_1|$$

πολύ μεγάλος αριθμός.

Άρα ο αλγόριθμος είναι ασταθής!

Υπάρχει εναλλακτικός τρόπος;

$$I_{n-1} = \frac{1 - I_n}{n}$$ (θα πηγαίνω προς τα πίσω) θα ξεκινάω από κάτι πιο μεγάλο.

Αν: $\tilde{I}_{n-1} = \dfrac{1 - \tilde{I}_n}{n}$

$$\Rightarrow I_n - \tilde{I}_n = (-1)^{n-m} \cdot \frac{1}{(n+1)\cdots(m-1)m} \cdot (I_m - \tilde{I}_m)$$

$$\Rightarrow |I_n - \tilde{I}_n| = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots m}\, |I_m - \tilde{I}_m|$$

Το σφάλμα μικραίνει!

Αν θέλω να βρω το I_n από πού θα ξεκινήσω;
Για $m > n$, πως προσεγγίζω το I_m;

$\longrightarrow$

Ξέρουμε ότι $0 < I_m \leq \frac{1}{m+1}$

Επιλέγοντας $\tilde{I}_m = 0$, έχουμε $|I_m - \tilde{I}_m| \leq \frac{1}{m+1}$

|20|02|2014|

1ο Μάθημα

Τετάρτη 5/03/2014
12:00 - 14:00

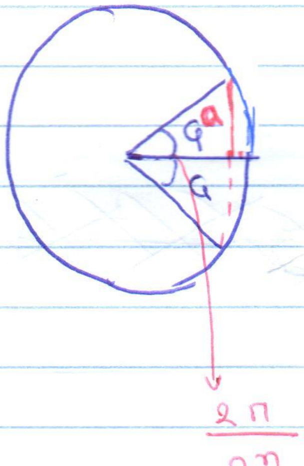
2ο Παράδειγμα: Προσέγγιση του π με τη μέθοδο του Αρχιμήδη.

$y_n = 2^n \cdot \sin \frac{\Pi}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$

Γεωμετρική ερμηνεία:

$\cdot\ y_1 = 2 \cdot \sin \frac{\Pi}{2} = 2$

y_n, $n \geq 2$



$\varphi = \frac{\Pi}{2^n}$

$a = \sin \frac{\Pi}{2^n}$

$2\varphi = \frac{2\Pi}{2^n}$, $2a = 2\sin\frac{\Pi}{2^n}$

πλευρά του κανονικού πολυγώνου με 2^n πλευρές εγγεγραμμένου στον μοναδιαίο κύκλο. (*)

Περίμετρος: $2^n \cdot 2a = 2^{n+1} \cdot \sin \frac{\Pi}{2^n}$

$= 2 \cdot y_n$.

y_n = ημιπερίμετρος του κανονικού ... (*)

Γεωμετρικό συμπέρασμα:

$$2 \leq y_n < y_{n+1} \leq \pi \quad \underline{\text{και}} \quad y_n \to \pi, \ n \to \infty$$

(Θδ.ο $y_{n+1} > y_n$ → αύξουσα ακολουθία)

$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$

$$y_n = 2^n \cdot \sin\frac{\pi}{2^n}$$

$$= 2^n \cdot 2 \cdot \sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$= \underbrace{2^{n+1} \cdot \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}_{= y_{n+1}} \cdot \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} > 0 \ \underline{\text{και}} < 1.$$

$$\Rightarrow \quad y_n < y_{n+1}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \overset{b>0}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{\sin(bx)}{bx} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin(bx)}{x} = b}$$

$$y_n = 2^n \cdot \sin\frac{\pi}{2^n} = \frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} \to \pi, \ n \to \infty$$

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} y_n = \pi}$$

$$y_{n+1} = 2^{n+1} \cdot \sin\frac{\pi}{2^{n+1}} = 2^{n+1} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{2^n}}{2}}$$

$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$= 2^{n+1} \cdot \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \pi/2^n}}{2}} \quad (1)$$

<u>Ξέρω</u>: $y_n = 2^n \cdot \sin\frac{\pi}{2^n} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2^n} = 2^{-n} \cdot y_n$

Άρα: $= 2^{n+1} \cdot \sqrt{\dfrac{1 - \sqrt{1-(2^{-n}\cdot y_n)^2}}{2}}$

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_{n+1} = 2^{n+1} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-(2^{-n}\cdot y_n)^2}\right)} \end{cases}, \quad n = 1, 2 \ldots$$

<u>Ασταθής αλγόριθμος</u>:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$= \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

θα το εφαρμόσω:

$$1 - \sqrt{1-(2^{-n}\cdot y_n)^2} = \frac{(2^{-n}\cdot y_n)^2}{1+\sqrt{1-(2^{-n}\cdot y_n)^2}}$$

$$y_{n+1} = 2^{n+1} \cancel{2}^{-n} \sqrt{\frac{1}{2(1+\sqrt{1-(2^{-n}\cdot y_n)^2}}} \cdot y_n$$

$$= 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2(1+\sqrt{1-(2^{-n}\cdot y_n)^2}}} \cdot y_n$$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(1+\sqrt{1-(2^{-n}\cdot y_n)^2})}} \cdot y_n$$

Παράσταση αριθμών ως προς οποιαδήποτε βάση.

Καθημερινή ζωή: Δεκαδικό σύστημα

Βάση: 10

Ψηφία: 0, 1, 2 ..., 9.

Παράδειγμα:

$$3.14159 = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-5}$$

Γενικά: Έστω $a_N, a_{N-1}, \ldots, a_0, a_{-1}, a_{-2}, \ldots$ ψηφία του δεκαδικού συστήματος. Τότε ο αριθμός:

$$(\underbrace{a_N a_{N-1} \ldots a_1 a_0}_{\text{ακέραιο μέρος}} . \underbrace{a_{-1} a_{-2} \ldots}_{\text{κλασματικό μέρος}})_{10}$$

$$= \boxed{a_N \cdot 10^N + a_{N-1} \cdot 10^{N-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0} + a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + \ldots$$

Ακέραιο μέρος:

$$P(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Τότε το $a_N a_{N-1} \ldots a_1 a_0$ είναι η τιμή του p στο $x = 10$

Κλασματικό μέρος: $.a_{-1} a_{-2} \ldots$

Είναι η τιμή της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \cdot x^k$ για $x = \frac{1}{10}$

Η σειρά αυτή μπορεί να έχει είτε πεπερασμένο είτε άπειρο πλήθος όρων.

<u>Μοναδικότητα της παράστασης:</u>

$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega^i = \frac{\omega}{1-\omega}$$

$\omega \leftarrow$ 1ος όρος

$1-\omega$: λόγος

$4.12\bar{9} = 4.129999\ldots = 4.130$

$$= 9 \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i} = 9 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1$$

Για μοναδικότητα απαιτούμε:

$$\forall k_0 \in \mathbb{N} \ \exists k > k_0 \text{ τω: } a_k \neq 9$$

<u>Σύστημα με βάση β:</u>

<u>Βάση:</u> β

<u>Ψηφία:</u> $0, 1, 2, \ldots, \beta-1$

a_k ψηφία

$$\pm (a_N a_{N-1} \ldots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots)_\beta$$

$$= \pm (a_N \cdot \beta^N + a_{N-1} \cdot \beta^{N-1} + \ldots + a_1 \cdot \beta^1 + a_0 \cdot \beta^0 . + a_{-1} \cdot \beta^{-1} + a_{-2} \cdot \beta^{-2} + \ldots)$$

<u>Παράδειγμα:</u> $(100110.11)_2 = 1 \cdot 2^5 + \cancel{0 \cdot 2^4} + \cancel{0 \cdot 2^3} + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + \cancel{0 \cdot 2^0} + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$

$= (38.75)_{10}$

25/02/2014

2º Μάθημα:
Τετάρτη, 26/03/2014
12:00-14:00.

Μετατροπή αριθμών από ένα σύστημα σε ένα άλλο.

(i) Μετατροπή από ένα σύστημα με βάση β στο δεκαδικό (πράξεις)

(a) Μετατροπή ακεραίων

Παράδειγμα: $(53473)_8 = 5\cdot 8^4 + 3\cdot 8^3 + 4\cdot 8^2 + 7\cdot 8^1 + 3\cdot 8^0$

$= 3 + 8(7 + 8(4 + 8(3 + 5\cdot 8)))$

$= \dots = (22.331)_{10}$

"Σχήμα του Horner"

(Γενικά)

$p(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$= a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots\dots + x(a_{N-1} + x a_N)\dots))$

(πράξεις από μέσα προς τα έξω)

(Σε μορφή αλγορίθμου)

$\boxed{y = p(x)}$

$y \leftarrow a_N$

για $i = N-1, \dots, 0$:

$\boxed{y \leftarrow a_i + x y}$ flop (floating point operation.)

Το σχήμα του Horner απαιτεί N flop

(β) Μετατροπή κλασματικών αριθμών.

$0 < x < 1$

Παράδειγμα:

$(0.11)_2 = 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = (0.75)_{10}$

(ii) Μετατροπή από το δεκαδικό σε σύστημα με βάση β

(a) Ακέραιους αριθμούς

Βασίζεται στον αλγόριθμο της διαίρεσης:

Παράδειγμα: $(369)_{10} \rightarrow$ στο οκταδικό σύστημα.

επειδή το "8" < "10" θα θέλω τουλ. 3 ψηφία

$(369)_{10} = (\ldots a_2 a_1 a_0)_8$

$= a_0 + 8(a_1 + 8(a_2 + \ldots))$

Συμπέρασμα: a_0 το υπόλοιπο της διαίρεσης 369:8
$a_1 + 8(a_2 + \ldots)$ το πηλίκο « «

$369 : 8 = 46$, υπόλοιπο 1

Άρα $\boxed{a_0 = 1}$
και $46 = a_1 + 8(a_2 + \ldots)$

Κάνω τη διαίρεση 46:8. Σταματάω όταν αυτός ο αριθμός είναι μικρότερος του 8

$46 : 8 = 5$, υπόλοιπο 6

Άρα: $\boxed{a_1 = 6}$

$5 = a_2 + 8(a_3 + \ldots)$

$\Rightarrow a_2 = 5$

και $a_3 = \ldots = 0$

Άρα: $(369)_{10} = (561)_8$

Επαλήθευση: $(561)_8 = 5\cdot 8^2 + 6\cdot 8^1 + 1\cdot 8^0$
$= (369)_{10}$

(b) Κλασματικών αριθμών.

$0 < x < 1$ στο δεκαδικό σύστημα.

$x = (.a_{-1}a_{-2}\ldots)_\beta = a_{-1}\cdot\beta^{-1} + a_{-2}\cdot\beta^{-2} + \ldots$

$\Rightarrow \beta x = a_{-1}\cdot\beta^0 + a_{-2}\cdot\beta^{-1} + \ldots$

(a_{-1}:) ακέραιο μέρος του βx

Παράδειγμα: $x = (.372)_{10} \longrightarrow$ στο δυαδικό σύστημα.

$(.372)_{10} = (.a_{-1}a_{-2}\ldots)_2$

Έχουμε: $2x = 0.744$, άρα: $a_{-1} = 0$ (→ ακέραιο μέρος $2x$)
και $f_1 = 0.744$ (f_1: κλασματικό μέρος)

$2f_1 = 1.488$ άρα $a_{-2} = 1$
και $f_2 = 0.488$

$2f_2 = 0.976$ άρα: $a_{-3} = 0$
και $f_3 = 0.976$

$2f_3 = 1.952$ άρα $a_{-4} = 1$
και $f_4 = 0.952$

Κάνω πράξεις μέχρι να βρω π.χ.: $f_8 = 0.744$ αυτό σημαίνει ότι επαναλαμβάνεται η διαδικασία.

Παρατήρηση: Στην παράσταση κλασματικών αριθμών είναι δυνατόν σε κάποιο σύστημα να αρκεί πεπερασμένο πλήθος ψηφίων και σε άλλο σύστημα να χρειάζεται άπειρο!

sos

Παράδειγμα:

Ισχυρισμός: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{2^{4n+1}}\right)=\frac{1}{10}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{2^{4n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2^{4n}}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{4n}}=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^4}\right)^n=\frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2^4}}{1-\frac{1}{2^4}}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{1}{\cancel{16}}}{\frac{15}{\cancel{16}}}=\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{15}\,5}=\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10}=\underbrace{2^{-4}+2^{-5}}_{n=1}+\underbrace{2^{-8}+2^{-9}}_{n=2}+\underbrace{2^{-12}+2^{-13}}_{n=3}+\dots$$

$\Rightarrow (0.1)_{10}=0.000\overline{1100}|1100\,1100\ldots$ (→ επαναλαμβάνεται περιοδικά)

$\Rightarrow (0.1)_{10}=(0.000\overline{1100})_2$

Αριθμοί μηχανής:

Έστω $x\in\mathbb{R}$, $x\neq0$

Σε ένα σύστημα με βάση β ο x μπορεί να γραφεί ως:

(*) $x=\pm\,.\,d_1d_2\ldots\,\beta^e$ με $\boxed{d_1\neq0}$, d_i ψηφία ως προς βάση β και e κατάλληλος ακέραιος. Η μορφή (*) λέγεται <u>κανονική μορφή κινητής υποδιαστολής</u>.

Το σύνολο των αριθμών μηχανής

$M = M(\beta, t, L, U)$

χαρακτηρίζεται από 4 παραμέτρους.

- β = βάση του συστήματος.
- t = ακρίβεια = πλήθος ψηφίων του κλάσματος των αριθμών.
- L = κάτω φράγμα } του εκθέτη e του β
- U = άνω «

($L \leq e \leq U$), L, U ακέραιοι και έχουν αντίθετες τιμές. δηλαδή $L \approx -U$.

Κάθε αριθμός μηχανής: $x \in M$, $x \neq 0$ είναι της μορφής

(+) $x = \pm\ .d_1 d_2 \dots d_t \cdot \beta^e$

με $d_1 \neq 0$ και e $L \leq e \leq U$. Το M δηλαδή αποτελείται από τους αριθμούς της μορφής (+) και το μηδέν.

- Το M είναι πεπερασμένο σύνολο.
- Μέγιστο στοιχείο του M: $d_i = \beta - 1$, $i = 1 \dots t$ και $e = U$
- Αριθμός με την ελάχιστη, μη μηδενική, απόλυτη τιμή: $d_1 = 1$, $d_2 \dots d_t = 0$ και το $e = L$

Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών στοιχείων του M δεν είναι σταθερή.

Το M δεν είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό, δηλαδή, $x, x^* \in M \not\Rightarrow x \cdot x^* \in M$.

Παράδειγμα:

$$\underbrace{\underbrace{0.1000\dots0 \cdot \beta^L}_{\in M} \times \underbrace{0.100\dots0 \cdot \beta^L}_{\in M}}_{\notin M}$$

Το M δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση: $x, x^* \in M \not\Rightarrow x + x^* \in M$.

Παράδειγμα: $\beta = 10$, $t = 5$.

$1, 10^{-5} \in M$

$1 + 10^{-5} = \underbrace{1.00001}_{\notin M}$

Μας ενδιαφέρει το M να είναι όσο πιο πυκνό και όσο πιο ευρύ γίνεται, δηλαδή να έχει:
- μεγάλο t
- μεγάλο διάστημα $[L, U]$

05/03/2014

Προσέγγιση αριθμών με αριθμούς μηχανής.

x πραγματικός αριθμός

(i) $|x| > \underbrace{.d_1 \ldots d_t \cdot \beta^U}_{\text{το μεγαλύτερο στοιχείο του } M}$, με $d_1 \ldots d_t = \beta - 1$

υπερχείλιση (overflow)

οι πράξεις σταματούν!

(ii) $0 < |x| < \underbrace{.1000 \ldots 0 \cdot \beta^L}_{\text{ο μικρότερος σε απόλυτη τιμή αριθμός μηχανής.}}$

1. υπερχείλιση!

Κατα κανόνα το x προσεγγίζεται με το μηδέν και οι υπολογισμοί συνεχίζονται.

(iii) $1 \cdot \beta^{L} \le |x| \le$ μέγιστο στοιχείο του M.

Ο x προσεγγίζεται με ένα $fl(x) \in M$

Συνήθως το $fl(x)$ είναι τέτοιο ώστε:

$$(*) \quad \boxed{\forall y \in M \qquad |x - fl(x)| \le |x - y|}$$

Ισχυρισμός: Αν ισχύει η $(*)$, τότε

$$(+) \quad \left|\frac{fl(x) - x}{x}\right| \le \frac{1}{2} \cdot \beta^{1-t}$$

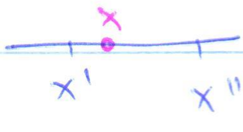
Σχετικό σφάλμα

Απόδειξη:

(i) $x \in M$. Τότε το σχετικό σφάλμα είναι μηδέν, άρα η $(+)$ ισχύει.

(ii) $x \notin M$. Τότε υπάρχουν διαδοχικοί αριθμοί $x', x'' \in M$ τω: $x' < x < x''$. Προφανώς, τότε:

$$|fl(x) - x| \le \frac{1}{2} |x'' - x'|$$



Άρα:

$$\left|\frac{fl(x)-x}{x}\right| \le \frac{1}{2}\,\frac{|x''-x'|}{|x|}$$

πως μπορώ να το εκτιμήσω

Έστω x.π.τ.χ. $x>0$, οπότε,

$x = .d_1\dots d_t d_{t+1}\dots \cdot \beta^k$
με $d_1 \neq 0$

(ο αμέσως μικρότερος του x)

Τότε: $x' = .d_1 d_2 \dots d_t \cdot \beta^k$? (αυξάνω το ψηφίο του x κατά 1)

$x'' = (.d_1 d_2 \dots d_t + \beta^{-t}) \cdot \beta^k$

Επομένως: $x'' - x' = \beta^{k-t}$

(Η διαφορά διαδοχικών αριθμών μηχανής εξαρτάται απ το k)

Επομένως, $\frac{fl(x)-x}{x} \le \frac{1}{2}\cdot\frac{\beta^{k-t}}{x}$

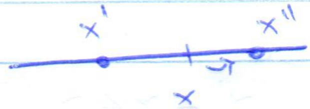
Το $x \geq .1 \cdot \beta^k = \beta^{k-1}$

Άρα: $\frac{fl(x)-x}{x} \le \frac{1}{2}\cdot\frac{\beta^{k-t}}{\beta^{k-1}} = \frac{\beta^{1-t}}{2}$

Στρογγύλευση:

π.χ. $\beta=10$, $t=5$

$x = .\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_5|\alpha_6\dots \cdot 10^k$



• Αν: $\alpha_6 \geq 5$ τότε: $fl(x) = x''$
$= (.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_5 + 10^{-5}) \cdot 10^k$

• Αν $\alpha_6 < 5$ τότε: $fl(x) = x'$

$= .\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_5 \cdot 10^k$.

(Αν $\alpha_6 = 5$ και $\alpha_7 = \alpha_8 = \dots = 0$ τότε μπορούμε να επιλέξουμε $fl(x)=x'$ είτε $fl(x)=x''$.)

Εναλλακτικά: <u>αποκοπή</u>

<u>π.χ</u>: $fl(x) = x' = .\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_5 \cdot 10^k$.

(αποκόπτουμε όλα τα άλλα ψηφία μετά την 5^{η} θέση.)

<u>Τότε</u>:

$$\left| \frac{fl(x) - x}{x} \right| \leq \beta^{1-t}$$

χωρίς το $\frac{1}{2}$

$$\left| \frac{fl(x) - x}{x} \right| \leq u \quad , \quad u = \frac{1}{2} \cdot \beta^{1-t} \quad \text{στη στρογγύλευση.}$$

$, \ u = \beta^{1-t}$ στην αποκοπή

$u =$ <u>μοναδιαίο</u> <u>σφάλμα</u> <u>στρογγύλευσης</u>

<u>Πράξεις</u> $* \in \{+, -, \times, :\}$

$x * y$

<u>Υπόθεση</u>: $fl(fl(x) * fl(y))$

<u>Παράδοξα</u>: $\beta = 10$, $t = 5$, $U = -L = 10$, <u>στρογγύλευση</u>.

$\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 3 \cdot 10^{-5}$ ($\alpha_i \in M$) (θα κάνω πρόσθεση)

Τοτε: $(\alpha_1+\alpha_2)=$ δεν γράφω $fl(\dots)$ γιατί $a_1, a_2 \in M$

$= fl(1.00003)$ | $3<5$ άρα

$= 1.0000$

$= 1$

Επίσης: $fl(fl(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_3)=1$

$fl(\alpha_2+\alpha_3)=6\cdot 10^{-5}$

$fl(\alpha_1+fl(\alpha_2+\alpha_3))=fl(1.00006)$

$= 1.0001$

Άρα έχει σημασία η σειρά με την οποία γίνονται οι προσθέσεις!

Γενικά, στη στρογγύλευση ισχύει ότι: $fl(1+x)=1$, αν $|x|<\frac{1}{2}\cdot\beta^{1-t}$, $\frac{1}{2}\cdot\beta^{1-t}$: μηδέν της μηχανής ή έψιλον της μηχανής

Επιρροή των σφαλμάτων στρογγύλευσης στους υπολογισμούς.

$$\frac{fl(fl(x)*fl(y))-x*y}{x*y}$$

Τι μπορούμε να πούμε γι' αυτό το σχετικό σφάλμα;

$\left|\underbrace{\frac{fl(x)-x}{x}}_{=\varepsilon}\right|\leq u$ (θα θέλα να έχω ισότητα)

$\Rightarrow fl(x)=x(1+\varepsilon)$ με $|\varepsilon|\leq u$

↑ εξαρτάται από το x. Δεν το γνωρίζω!

(a) $fl(x) = x(1+\varepsilon), \; |\varepsilon| \leq u$

(b) Αν ε_i τω: $|\varepsilon_i| \leq u$, τότε υπάρχει ε με $|\varepsilon| \leq u$ τω: $\prod_{i=1}^{m}(1+\varepsilon_i) = (1+\varepsilon)^m$.

06/03/2014

Απορίες: Τετάρτη

02/04/2014

12:00-14:00

(*) $(1-u)^m \leq \prod_{i=1}^{m}(1+\varepsilon_i) \leq (1+u)^m$

$f: [-u, u] \to \mathbb{R}, \; f(x) = (1+x)^m$

f συνεχής σύμφωνα με την (*), $f(-u) \leq \prod_{i=1}^{m}(1+\varepsilon_i) \leq f(u)$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής, έχουμε:

$$\prod_{i=1}^{m}(1+\varepsilon_i) = \underset{\substack{\uparrow \\ (1+\varepsilon)^m}}{f(\varepsilon)}, \text{ με } \underbrace{-u \leq \varepsilon \leq u}_{|\varepsilon| \leq u}$$

$fl(x) = x(1+\varepsilon_1), \; fl(y) = y(1+\varepsilon_2)$

Πολλαπλασιασμός:

$z = fl(\underbrace{fl(x) \cdot fl(y)}) = xy(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\cdot(1+\varepsilon_3) = xy(1+\varepsilon)^3$

$|\varepsilon_i| \leq u$

$|\varepsilon| \leq u$

$$\frac{z - xy}{xy} = \frac{xy(1+\varepsilon)^3 - xy}{xy} = (1+\varepsilon)^3 - 1 = \cancel{1} + 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - \cancel{1} = 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3$$

$$\Rightarrow \left|\frac{z - xy}{xy}\right| = |3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3|$$

$$\leq 3u + \underbrace{3u^2 + u^3}_{O(u^2)}$$

$O(u^2)$ πολύ μικρότερο από το u!

Συμπέρασμα: Το σχετικό σφάλμα στον πολλαπλασιασμό είναι περίπου τριπλάσιο του μοναδιαίου σφάλματος στρογγύλευσης. (πολύ καλό αποτέλεσμα)

Διαίρεση:

$$z = fl\left(\frac{fl(x)}{fl(y)}\right) = \frac{x(1+\varepsilon_1)}{y(1+\varepsilon_2)} \cdot (1+\varepsilon_3)$$

$$\frac{1}{(1+\varepsilon_2)} = 1+\delta \Rightarrow \delta = -\frac{\varepsilon_2}{1+\varepsilon_2}$$ (2)

$$\Rightarrow z = \frac{x}{y}\underbrace{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)}_{=(1+\varepsilon)^2,\ |\varepsilon| \leq u}(1+\delta)$$

Για το σφάλμα:

$$\frac{z - \frac{x}{y}}{\frac{x}{y}} = (1+\varepsilon)^2(1+\delta) - 1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{z - \frac{x}{y}}{\frac{x}{y}}\right| = |\underbrace{\delta + 2\varepsilon}_{\leq 3u} + \underbrace{\varepsilon^2}_{u^2} + \underbrace{\varepsilon^2\delta}_{u^3} + \underbrace{2\varepsilon\delta}_{u^2}|$$

$$\leq 3u + a, \quad a = O(u^2)$$

(1)

$$|\delta| \le \frac{u}{1-u} = u \cdot (1 + u + u^2 + \dots) = u + O(u^2)$$

<u>Πρόσθεση - Αφαίρεση:</u>

$$z = fl\,(fl(x) + fl(y))$$
$$= [x(1+\varepsilon_1) + y(1+\varepsilon_2)](1+\varepsilon_3)$$

$$= x\,\underbrace{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)}_{(1+\varepsilon)^2,\ |\varepsilon|\le u} + y\,\underbrace{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)}_{(1+\delta)^2}, \quad |\delta| \le u$$

$$= x(1+2\varepsilon+\varepsilon^2) + y(1+2\delta+\delta^2)$$
$$= (x+y) + 2(\varepsilon x + \delta y) + \underbrace{(\varepsilon^2 x + \delta^2 y)}_{O(u^2)}$$

$$\approx (x+y) + 2(\varepsilon x + \delta y)$$

$$z - (x+y) \approx 2(\varepsilon x + \delta y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|\frac{z-(x+y)}{(x+y)}\right| \approx 2\left|\frac{(\varepsilon x + \delta y)}{|x+y|}\right| \le 2\,\frac{|x|+|y|}{|x+y|}\cdot u$$

<u>1η Περίπτωση:</u> x, y ομόσημοι. Τότε:
$$\frac{|x|+|y|}{|x+y|} = 1$$

Το σφάλμα είναι το πολύ $2u$

<u>2η Περίπτωση:</u> x, y ετερόσημοι

Στη χειρότερη περίπτωση έχουμε το $\varepsilon \approx -\delta$ και $|\varepsilon| \approx u$, τότε $\left|\frac{z-(x+y)}{x+y}\right| \approx 2\,\frac{|x-y|}{|x+y|}$

Αν τα x και y είναι πολύ κοντά μεταξύ τους και κάνουν αφαίρεση, τότε το σχετικό σφάλμα μπορεί να γίνει πολύ μεγάλο.

Καταστροφική επιρροή των σφαλμάτων στρογγύλευσης στην αφαίρεση σχεδόν ίσων αριθμών

Παράδειγμα | $\beta=10$, $t=5$, $u=-L=10$
στρογγύλευση.

$x=.\boxed{45142}708$, $y=-.\boxed{45115}944$
$x+y=.26764\cdot 10^{-3}$ 7>5, 9>5

$$\begin{aligned} z &= fl\left(fl(x)+fl(y)\right) \\ &= fl\left(.45143-.45116\right) \\ &= .00027 \\ &= .27000\cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Η αφαίρεση σχεδόν ίσων αριθμών πρέπει να αποφεύγεται, ή τουλάχιστον να γίνεται με μεγαλύτερη ακρίβεια. π.χ με διπλή ακρίβεια.

Παραδείγματα: | $\beta=10$, $t=5$

$\sqrt{7298}-\sqrt{7297}=.5628470000\cdot 10^{-2}$
κακή προσέγγιση

$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, Τοτε:

$$\sqrt{7298}-\sqrt{7297}=\frac{1}{\sqrt{7298}+\sqrt{7297}}=.5628468914\cdot 10^{-2}$$

καλή προσέγγιση

2ο Παράδειγμα: $f(x) = x - \sin x$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τιμές της f για $|x|$ μικρό.

Ξέρουμε ότι:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x), \quad |\varepsilon(x)| \leq \frac{|x|^5}{120}$$

Επομένως:

$$f(x) \simeq \frac{x^3}{6}$$

Σφάλματα στον υπολογισμό αθροισμάτων.

Παράδειγμα: $S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}$, $n \in \mathbb{N}$

Έχουμε: $\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

οπότε: $S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$

$$= 1 + \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) \cancel{+} \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{n+1}.$$

$$\Rightarrow S_n = 2 - \frac{1}{n+1}$$

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ γνήσια αύξουσα και $S_n \to 2$, $n \to \infty$

Π.χ για $n = 9999$, έχουμε $S_{9999} = 1.9999$

1ος Τρόπος $S_0 = 1$, $S_k = S_{k-1} + \dfrac{1}{k(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Αποτέλεσμα στου υπολογιστή: $\beta = 10$, $t = 10$

$$\tilde{S}_{9999} = 1.999\boxed{89997}$$

λάθος ψηφία

Εδώ αθροίσαμε από τον μεγαλύτερο όρο προς τον μικρότερο.

2ος Τρόπος: Υπολογίζουμε το άθροισμα αθροίζοντας από τον ~~από~~ μικρότερο όρο προς τον μεγαλύτερο.

$$\begin{cases} T_0 = \dfrac{1}{n(n+1)}, \quad T_k = T_{k-1} + \dfrac{1}{(n-k)(n-k+1)}, \quad k = 1, \ldots, (n-1) \\ T_n = T_{n-1} + 1 \end{cases}$$

Τότε: $T_n = S_n$

Αποτέλεσμα του υπολογιστή μας:

$$\tilde{T}_{9999} = 1.9999000\ldots0 = S_{9999}$$

Ερώτημα: - Γιατί είναι καλύτερο το αποτέλεσμα με τον 2ο τρόπο;

- Πως πρέπει να υπολογίζουμε γενικά αθροίσματα;

Πρόβλημα: Έστω $a_1, \dots, a_N \in M$

Θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα
$$S_N = \sum_{i=1}^{N} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_N$$

Παρατήρηση: Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $|\varepsilon_i| \leq u$, $i=1,2$, τότε υπάρχει ένα ε_3 με $|\varepsilon_3| \leq u$ τω:
$\lambda \varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2 = (|\lambda| + |\mu|) \cdot \varepsilon_3$, θέτω $\varepsilon_3 = \dfrac{\lambda \varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2}{|\lambda| + |\mu|}$

και έχουμε: $|\varepsilon_3| \leq \dfrac{|\lambda||\varepsilon_1| + |\mu| \cdot |\varepsilon_2|}{|\lambda| + |\mu|}$

$$\Rightarrow |\varepsilon_3| \leq \frac{|\lambda| u + |\mu| u}{|\lambda| + |\mu|}$$
$$\Rightarrow |\varepsilon_3| \leq u$$

Αλγόριθμος:

$$\begin{cases} S_1 = a_1 \\ S_k = S_{k-1} + a_k, & k = 2, \dots, N \end{cases}$$

Λαμβάνουμε προσεγγίσεις:
$$\begin{cases} \tilde{S}_1 = a_1 \\ \tilde{S}_k = fl(\tilde{S}_{k-1} + a_k), & k = 2, \dots, N \end{cases}$$

Έχουμε:
$$\tilde{S}_2 = fl(\underbrace{\tilde{S}_1}_{= S_1 = a_1} + a_2)$$
$$= fl(S_2) = S_2(1+\delta) = S_2 + S_2 \cdot \delta, \quad |\delta| \leq u$$

$$\tilde{s}_3 = fl(\tilde{s}_2 + a_3) = fl(\underbrace{s_2 + s_2 \cdot \delta + a_3}_{=s_3})$$

$$= fl(s_3 + s_2 \cdot \delta)$$

$$= (s_3 + s_2 \cdot \delta)(1+\delta') \quad , \quad |\delta'| \le u$$

$$= s_3 + s_2\delta + s_3\delta' + s_2\delta\delta'$$

$$\approx s_3 + \underbrace{s_2\delta + s_3\delta'}_{= (|s_2| + |s_3|) \cdot \varepsilon_3} \quad , \quad |\varepsilon_3| \le u$$

$$\Rightarrow \tilde{s}_3 \approx s_3 + (|s_2| + |s_3|)\varepsilon_3$$

Γενικά: $\tilde{s}_k \approx s_k + (|s_2| + |s_3| + \dots + |s_k|) \cdot \varepsilon_k \quad , \quad |\varepsilon_k| \le u$

Για $k = N$:

$$\tilde{s}_N \approx s_N + (|s_2| + |s_3| + \dots + |s_N|)\varepsilon_N \quad , \quad |\varepsilon_N| \le u$$

→ Σφάλμα της τάξης $O(u^2)$

07/03/2014

Άσκηση 1.2

(a) $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$, $|x|$ μικρό
(χωρίς ανάπτυγμα Taylor)

(b) $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

(γ) $\log x - \log y = \log\frac{x}{y}$

(δ) $\sin(a+x) - \sin a = 2\sin\frac{x}{2}$

$|x|$ μικρή

$\cos\left(a+\frac{x}{2}\right)$

Άσκηση 1.3

$x^2 - 2ax + b = 0$

$a, b > 0,\ a^2 >> b$

$x_1 = a + \sqrt{a^2 - b}$

$x_2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - b}$ ασταθής!

$x_1 x_2 = b \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{b}{x_1}}$

$$x_2 = \alpha - \sqrt{a^2 - b} = \frac{b}{a + \sqrt{a^2 - b}} = \frac{b}{x_1}$$

Άσκηση 1.4

$x^3 + 3px + 2q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, $p^3 + q^2 > 0$

(a) έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα ρ, που δίνεται από τον τύπο

$\rho = u - v$ με

$u = \left(\sqrt{p^3 + q^2} - q\right)^{1/3}$

$v = \left(\sqrt{p^3 + q^2} + q\right)^{1/3}$ τύπος του Cardano

Ύπαρξη πραγματικής ρίζας: $f(x) = x^3 + 3px + 2q$

• $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Άρα η f παίρνει και θετικές τιμές.

• $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Άρα η f παίρνει και αρνητικές τιμές.

Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, η f παίρνει και την τιμή μηδέν, επομένως έχει τουλάχιστον μια ρίζα

Μοναδικότητα πραγματικής ρίζας:

$$f'(x) = 3x^2 + 3p = 3(x^2 + p)$$

1η Περίπτωση: $p \geq 0$. Τότε ισχύει $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

Άρα η $f \nearrow$ γνησίως αύξουσα

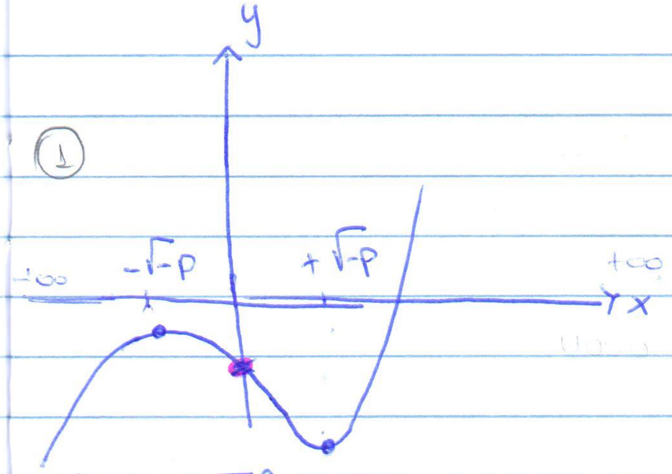
Συμπέρασμα: η f έχει το πολύ μια ρίζα.

2η Περίπτωση: $p < 0$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + p = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{-p}}$$

		$-\sqrt{-p}$		$+\sqrt{-p}$	
f'	$+$		$-$		$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

1

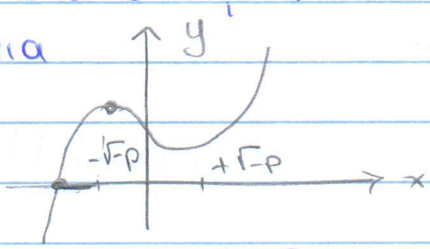


$$\left.\begin{aligned} f(-\sqrt{-p}) &= 2(q - p\sqrt{-p}) \\ f(\sqrt{-p}) &= 2(q + p\sqrt{-p}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(-\sqrt{-p})\cdot f(\sqrt{-p}) = 4(q^2 - p^2(-p))$$

$$= 4(p^3 + q^2) > 0$$

απο υπόθεση

- $f(-\sqrt{-p}) > 0$. Τοτε η f έχει στο $(-\infty, -\sqrt{-p})$ ακριβώς μια ρίζα και καμια ρίζα στο $(-\sqrt{-p}, +\infty)$



- $f(-\sqrt{-p}) < 0$. (1) Τότε στο $(-\infty, \sqrt{-p})$ δεν υπάρχει ρίζα, ενώ στο $(\sqrt{-p}, +\infty)$ έχει ακριβώς μια ρίζα

$$f(p) = (u-v)^3 + 3p(u-v) + 2q \quad (\text{θδο } f(p)=0)$$

$$= u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 + 3p(u-v) + 2q$$

$$= \cancel{-2q} - 3u^2v + 3uv^2 + 3p(u-v) \cancel{+2q}$$

$$= -3uv(u-v) + 3p(u-v)$$

$$= -3\underbrace{(uv-p)}_{0}(u-v) = -3(\cancel{p}-\cancel{p})(u-v) = 0.$$

Τώρα: $uv = (p^3 + \cancel{q^2} - \cancel{q^2})^{1/3} = p$

11/03/2014

$$\tilde{S}_N \approx S_N + (|S_2| + |S_3| + \dots + |S_N|)\,\varepsilon_N$$

με $|\varepsilon_N| \le u$

με σφάλμα της τάξης $O(u^2)$

Επομένως,

$$\frac{\tilde{S}_N - S_N}{S_N} \approx \frac{|S_2| + |S_3| + \dots + |S_N|}{S_N} \cdot \varepsilon_N$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\tilde{S}_N - S_N}{S_N}\right| \approx \frac{|S_2| + |S_3| + \dots + |S_N|}{|S_N|} \cdot \underbrace{|\varepsilon_N|}_{\le u}$$

$$\le \boxed{\frac{|S_2| + |S_3| + \dots + |S_N|}{|S_N|}} \cdot u$$

Συμβολισμός: $\delta_N = |S_2| + \dots + |S_N|$

$$P_N = \frac{\delta_N}{|S_N|}$$

P_N: συντελεστής μετάδοσης του σχετικού σφάλματος στρογγύλευσης στον αλγόριθμό μας

Προφανώς: $P_N \ge 1$.

Αν το P_N είναι πολύ μεγάλο, τότε ο αλγόριθμος είναι ασταθής. Π.χ αυτό συμβαίνει αν κάποιο από τα ενδιάμεσα αθροίσματα S_k έχει πολύ μεγαλύτερη απόλυτη τιμή από το τελικό αποτέλεσμα.

Ειδική περίπτωση: $a_i > 0$, $i=1,\dots,N$

$$f_N = S_2 + S_3 + \dots + S_N$$
$$= (N-1)a_1 + (N-1)a_2 + (N-2)a_3 + \dots + 2a_{N-1} + a_N$$

Το f_N παίρνει την ελάχιστη τιμή του (για δεδομένους αριθμούς $a_1, \dots, a_N$), αν $a_1, a_2 \le a_3 \le a_4 \le \dots \le a_N$ (καλύτερη επιλογή)

Χειρότερη επιλογή:

$a_1, a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \dots \geq a_N$

Παράδειγμα: Προσέγγιση e^{-x} → φθίνει πολύ γρήγορα για $x \gg 1$

$$S_N(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^{N-1}\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$$

Για αρκετά μεγάλο N έχουμε $S_N(x) \approx e^{-x}$

Για $x=100$ έχουμε: $S_1 = 1$

$S_2 = 1 - 100 = -99$

$S_3 = 4.901$, $S_4 = 161.766\dots$

Παταγώδης αποτυχία!

Εναλλακτικά: $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}$

Ευστάθεια αλγορίθμων:

Ένας αλγόριθμος λέγεται **ασταθής**, αν είναι ευαίσθητος σε σφάλματα στρογγύλευσης, δηλαδή αν μικρά σφάλματα που γίνονται κατά την παράσταση των αριθμών και στις πράξεις, είναι δυνατόν να επιφέρουν μεγάλες μεταβολές στο τελικό αποτέλεσμα.

Ένας αλγόριθμος λέγεται **ευσταθής**, αν τα τελικά αποτελέσματα του δεν επηρεάζονται πολύ από τα μικρά σφάλματα στρογγύλευσης.

Παραδείγματα: e^{-x}, $x >> 1$

$$S_N(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^{N-1} \frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$$ ασταθής!

$$\frac{1}{e^x}: \quad \tilde{S}_N(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$$

$$\frac{1}{e^x} \approx \frac{1}{\tilde{S}_N(x)}$$

— — — — —

$$I_n = \int_0^1 x^n \cdot e^{x-1}\, dx$$

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{e} \\ I_n = 1 - n I_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Ασταθής

— — — — — —

$$y_n = 2^n \cdot \sin\frac{\pi}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_n = 2^{n+1} \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-(2^{-n}\cdot y_n)^2}\right)}, & n = 1, 2 \ldots \end{cases}$$, **ασταθής**

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_n = \sqrt{\dfrac{2}{1+\sqrt{1-(2^{-n}\cdot y_n)^2}}} \end{cases}$$, ευσταθής!

Κατάσταση Προβλημάτων:

Λέμε ότι ένα πρόβλημα έχει <u>καλή κατάσταση</u> εάν μικρές μεταβολές στα δεδομένα του έχουν ως συνέπεια μικρή μεταβολή της λύσης.

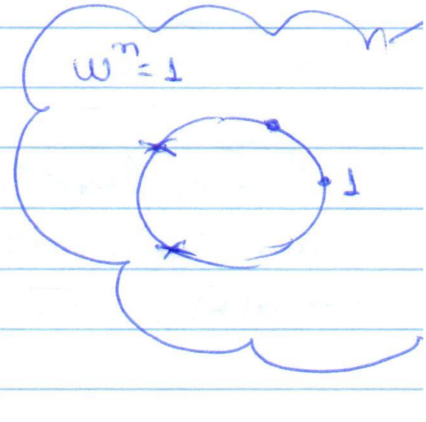
Λέμε οτι ένα πρόβλημα έχει <u>κακή κατάσταση</u>, αν είναι δυνατόν μικρές μεταβολές στα δεδομένα του να επιφέρουν μεγάλη μεταβολή στη λύση.

<u>Παράδειγμα:</u> $(x-2)^6 = 0$

$\Rightarrow \boxed{x = 2}$ (πολλαπλή ρίζα) → έχει καλή κατάσταση.

$(x-2)^6 = 10^{-6} \Rightarrow x_k = 2 + \frac{1}{10} e^{\frac{2ki\pi}{6}}$

$k = 0, \ldots, 5$



<u>Τότε:</u> $|x_k - \overset{x^*}{2}| = \frac{1}{10}$ <u>κακή κατάσταση.</u>

2ο Κεφάλαιο: Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων

Δεδομένα: Μια συνάρτηση f, που ορίζεται σε ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών (και παίρνει πραγματικές τιμές.)
(f ομαλή)

Ζητούμενο: x^* στο πεδίο ορισμού της f τω
$f(x^*) = 0$.
x^* ρίζα της f

Αριθμητικές μέθοδοι:
Για δεδομένη f και αρχική τιμή x_0 οι αριθμητικές μέθοδοι δίνουν, συνήθως μια ακολουθία $x_1, x_2, \dots, \dots$
η οποία υπο ορισμένες προϋποθέσεις συγκλίνει σε μια ρίζα x^* με κάποιον όρο x_N, που επιλέγεται με βάση εμπειρικά κριτήρια τερματισμού.

I διάστημα
$C(I) := \{ f : I \to \mathbb{R},\ f \text{ συνεχής} \}$

$C^n(I) = \{ f : I \to \mathbb{R},\ f \ n \text{ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο } I \}$
$I = (a, b)$
$C(a,b)$, $C^n[a,b]$

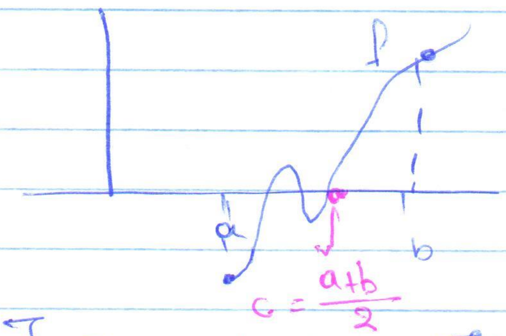
Μέθοδος της διχοτόμησης (του διαστήματος)

Η μέθοδος βασίζεται στο: Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής.
~~Θεώρ~~ Έστω $g \in C[a,b]$ και k αριθμός μεταξύ των $g(a)$ και $g(b)$. Τότε υπάρχει $x \in [a,b]$ τω $g(x) = k$

Ιδέα: $f \in C[a,b]$ $\operatorname{sgn} f(a) = \operatorname{sgn} f(b)$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{αν } x>0 \\ -1, & \text{αν } x<0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases}$$

Ενδιαφέρουσα περίπτωση: $f(a)\cdot f(b) < 0$



Τότε υπάρχει ρίζα x^* της f στο $[a,b]$

- $f(c)=0$ ∈ ρίζα!
- $f(c)\cdot f(a)<0$, τότε υπάρχει ρίζα της f στο $[a,c]$
- $f(c)\cdot f(a)>0$ « « « « f στο $[c,b]$

Δεδομένα του αλγορίθμου:

a, b, f τω: $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b)$
$f \in C[a,b]$, και $\varepsilon>0$
(μέγιστο επιτρεπτό σφάλμα, ανοχή σφάλματος.)

$a \quad \frac{a+b}{2} \quad b$

$x^* \in (a,b) \Rightarrow \left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2}$

Αλγόριθμος:

υπολόγισε $f(a)$, $\delta = b-a$

1. $\delta \leftarrow \frac{\delta}{2}$

αν $\delta \leq \varepsilon$, τύπωσε τα a,b
Έξοδος!

Διαφορετικά (δηλ. $\delta>\varepsilon$)

υπολόγισε $c = \frac{a+b}{2}$, $f(c)$

Τύπωσε $a, b, c, f, \delta, f(c)$

αν $f(c) = 0$, έξοδος!

διαφορετικά ($f(c) \neq 0$)

αν $\operatorname{sgn} f(c) = \operatorname{sgn} f(a)$

$a \leftarrow c \quad f(a) \leftarrow f(c)$

διαφορετικά (δηλ. $\operatorname{sgn} f(c) \neq \operatorname{sgn} f(a)$):

$b \leftarrow c$

πηγαίνω στο 1.

<u>Πρακτικά ζητήματα:</u> για τον αλγόριθμο της μεθόδου διχοτόμησης.

(1) Το ερώτημα $\operatorname{sgn} f(c) = \operatorname{sgn} f(a)$ δεν πρέπει να τίθεται στη μορφή $f(c) \cdot f(a) > 0$ γιατί οδηγεί σε υπερχείλιση!

(2) Το $c = \frac{a+b}{2}$ καλό είναι να υπολογίζεται ως $c = a + \frac{b-a}{2}$

Διαφορετικά μπορεί να οδηγηθούμε σε c έξω από το $[a, b]$

<u>Παράδειγμα:</u> $b = 10 \quad t = 2$, $U = -L = 10$ <u>αποκοπή</u>

$a = 0.61 \quad b = 0.66$

$$fl(a+b) = fl(1.27) = 1.2$$

$$\Rightarrow c = 0.6 < a!$$

③ $c = a + \frac{b-a}{2}$ Για πολύ μικρό ε, μπορεί να οδηγηθούμε σε αποτέλεσμα $c=a$

13/03/2014

Πρόταση (Εκτίμηση του σφάλματος της μεθόδου της διχοτόμησης)

Έστω ότι $f \in C[a,b]$, $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b)$, και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία των προσεγγίσεων (δηλαδή των μέσων των διαδοχικών διαστημάτων) που δίνει η μέθοδος της διχοτόμησης. Τότε, είτε $x_N = x^*$ για κάποιο N, είτε η $x_n \to x^*$, $n \to \infty$, όπου x^* ρίζα της συνάρτησης f στο διάστημα $[a,b]$. Μάλιστα ισχύει η εκτίμηση σφάλματος

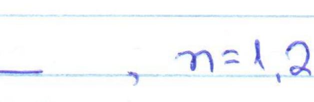
για εκτίμηση

$$\underbrace{|x^* - x_n|}_{\text{σφάλμα}} \leq \frac{b-a}{2^n}, \quad n=1,2,\ldots$$

Απόδειξη

Θέτουμε $a_1=a$, $b_1=b$ και συμβολίζουμε με $I_i=[a_i,b_i]$ για $i=1,2,\ldots$ τα διαδοχικά διαστήματα που κατασκευάζει η μέθοδος της διχοτόμησης. Έστω x_i το μέσον του I_i. Προφανώς, $I_{i+1} \subset I_i$. Επειδή σε κάθε I_i υπάρχει ρίζα της f, υπάρχει μια ρίζα x^* της f που περιέχεται σε όλα τα διαστήματα που κατασκευάζει η μέθοδος.

Τώρα:



$$|x^* - x_n| \leq \frac{b_n - a_n}{2} \quad (1)$$

Αλλά:

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2^1} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} = \dots = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = \frac{b-a}{2^{n-1}}$$

οπότε: (1) $\Rightarrow$ $|x^* - x_n| \le \dfrac{b-a}{2^n}$

Πλεονεκτήματα:

1. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί υπο γενικές συνθήκες στην f: απαιτεί μόνο συνέχεια της f και αλλαγή προσήμου σε μιά περιοχή μιας ρίζας της.

2. Συγκλίνει πάντα, όταν μπορεί να εφαρμοστεί

3. Απαιτεί έναν μόνο υπολογισμό της f ανα βήμα.

4. Μπορούμε να προσδιορίσουμε εκ των προτέρων ένα πλήθος βημάτων που εξασφαλίζει την προσέγγιση μιας ρίζας με μια δεδομένη ακρίβεια.

Μειονέκτημα: Συγκλίνει αργά, οπότε το συνολικό κόστος είναι υψηλό.

Στην πράξη χρησιμοποιείται για έναν χονδρικό εντοπισμό ριζών.

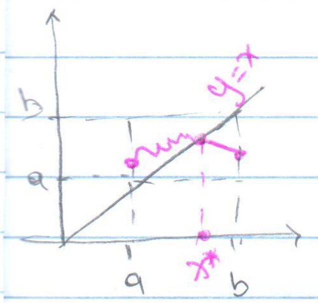
Επαναληπτικές μέθοδοι:

Βασική ιδέα: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \varphi(x)}$

x_{n-1}, $x_n = \varphi(x_{n-1})$

Ορισμός: Ένα σημείο x^* στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης φ τω: $\varphi(x^*)=x^*$ λέγεται σταθερό σημείο της φ.

Πρόταση: Έστω ότι έχω $\varphi:[a,b]\to[a,b]$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε, η φ έχει (τουλάχιστον ένα) σταθερό σημείο στο $[a,b]$



Απόδειξη

1. $\varphi(a)=a$ ✓
2. $\varphi(b)=b$ ✓
3. $\varphi(a)>a$, $\varphi(b)<b$ (αν $\varphi(a)\neq a$ και $\varphi(b)\neq b$)

$g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\varphi(x)-x$. Τότε, η g είναι συνεχής, και $g(a)=\varphi(a)-a>0$, $g(b)=\varphi(b)-b<0$. Σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $x^*\in(a,b)$ τω $g(x^*)=0$, οπότε $\varphi(x^*)-x^*=0$ δηλαδή $\varphi(x^*)=x^*$

Ορισμός: (Συνθήκη του Lipschitz)

Έστω $I\subset\mathbb{R}$ λέμε ότι μια συνάρτηση $\varphi: I\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί στο I την συνθήκη του Lipschitz, αν υπάρχει μια σταθερά $L\geq 0$ τω:

$$\forall x,y\in I : |\varphi(x)-\varphi(y)|\leq L|x-y|$$

Αν η σταθερά L μπορεί να επιλεγεί μικρότερη της μονάδας τότε η φ λέγεται <u>συστολή</u> στο I

Παρατήρηση: Αν η φ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη $\boxed{\varphi \in C^1[a,b]}$ τότε η φ ικανοποιεί στο $[a,b]$ τη συνθήκη του Lipschitz:

$x, y \in [a,b]$, $x \neq y$

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x-y} = \varphi'(\xi) \text{ με } \xi \text{ μεταξύ } x \text{ και}$$

Άρα: $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x-y|$

οπότε, με $L = \max_{a \leq \xi \leq b} |\varphi'(\xi)|$,

έχουμε: $\forall x, y \in [a,b] : |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L\,|x-y|$

Αυτή η L είναι η μικρότερη δυνατή σταθερά

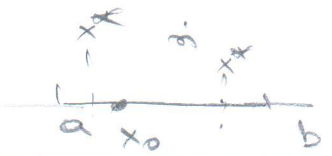
Μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα όχι κλειστ διάστημα ΔΕΝ ικανοποιεί αναγκαστικά τη συνθήκη του Lipschitz.

π.χ.: $\varphi(x) = \sqrt{x}$, $x \in (0,1]$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to \infty, \quad x \to 0$$

Άρα δεν υπάρχει σταθερά L τ.ω.

$$\forall x, y \in (0,1] : |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L\,|x-y|$$



Θεώρημα (της συστολής)

Έστω $\varphi : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ μια συστολή με σταθερά L $(L<1)$. Τότε η φ έχει στο $[a,b]$ ακριβώς ένα σταθερό σημείο, δηλαδή:

$$\exists_1\, x^* \in [a,b] : \varphi(x^*) = x^*$$

Για τυχαία αρχική τιμή $x_0 \in [a,b]$ η ακολουθία (x_n) $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n = 1,2,\dots$, είναι καλά ορισμένη, (δηλαδή $x_n \in [a,b]$ για κάθε n), συγκλίνει στο x^*, και για τα σφάλματα $x_n - x^*$ ισχύουν οι εκτιμήσεις:

(1) $|x_n - x^*| \le L^n\, |x_0 - x^*| \le L^n \cdot \max(x_0 - a,\ b - x_0)$

(2) $|x_n - x^*| \le \dfrac{L^n}{1-L}\, |x_1 - x_0|$ ($\Rightarrow$ εκ των προτέρων)

και

(3) $|x_n - x^*| \le \dfrac{L}{1-L}\, |x_n - x_{n-1}|$ ($\Rightarrow$ εκ των υστέρων)

Απόδειξη:

Μοναδικότητα σταθερού σημείου: Έστω $x^*, y^* \in [a,b]$ τ.ω. $\varphi(x^*) = x^*$, $\varphi(y^*) = y^*$ και $x^* \ne y^*$. Τότε:

$$|x^* - y^*| = |\varphi(x^*) - \varphi(y^*)| \le \underset{<1}{L}\ \underbrace{|x^* - y^*|}_{\ne 0}$$

$$< |x^* - y^*| \quad \text{ΑΤΟΠΟ}$$

Υπαρξη + εκτίμηση (1): Αφού το $x_0 \in [a,b]$, έχουμε $x_1 = \varphi(x_0) \in [a,b]$. Επαγωγικά συμπεραίνουμε ότι $x_n \in [a,b]$, άρα η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον,

$$|x_n - x_{n-1}| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_{n-2})|$$

$$\leq L\,|x_{n-1} - x_{n-2}|$$

Επαγωγικά βλέπουμε ότι:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq L^n\,|x_1 - x_0|,\quad n=1,2,\ldots$$

Ισχυρισμός: Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy:

$a_n \to a,\ n\to\infty$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ |a_n - a| \leq \varepsilon$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία ή ακολουθία Cauchy

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n,m \geq N$

$|a_n - a_m| \leq \varepsilon$

$$|x_{n+k} - x_n| = |(x_{n+k} - x_{n+k-1}) + (x_{n+k-1} - x_{n+k-2}) + \ldots + (x_{n+1} - x_n)|$$

$$\leq |x_{n+k} - x_{n+k-1}| + |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n|$$

$$\leq L^{n+k-1}|x_1 - x_0| + L^{n+k-2}|x_1 - x_0| + \ldots + L^n|x_1 - x_0|$$

$$= L^n\,|x_1 - x_0|\,\underbrace{(1 + L + \ldots + L^{k-1})}_{=\frac{1-L^k}{1-L}}$$ (από το τέλος προς την αρχή)

$$\Rightarrow |x_{n+k} - x_n| \leq \frac{1}{1-L}\cdot L^n\,|x_1 - x_0|$$

Το δεξιό μέλος τείνει στο μηδέν καθώς το n τείνει στο ∞, οπότε η $|x_{n+k} - x_n|$ γίνεται όσο μικρή θέλουμε για n αρκετά μεγάλο.

Έστω $x_n \to \tilde{x}$, $n \to \infty$

Τότε:

$$\tilde{x} = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) \overset{\text{γιατί } \varphi \text{ συνεχής}}{=} \varphi\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right) = \varphi(\tilde{x})$$

Οπότε $\tilde{x} = x^*$

$$\underbrace{|x_{n+k} - x_n|}_{\downarrow\, k\to\infty \;\; |x^* - x_n|} \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

$$\Rightarrow |x^* - x_n| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0| \quad (2)$$

|14|03|2014|

Άσκηση 1.4

$x^3 + 3px + 2q = 0$

$p^3 + q^2 > 0$

(α) Ρίζα $p = u - v$

$u = (\sqrt{p^3+q^2} - q)^{1/3}$

$v = (\sqrt{p^3+q^2} + q)^{1/3}$

(β) $p^3 \gg q^2$, Τότε ισχύει: $u \approx v \approx \sqrt{p}$ (ξεχνάω τα q) (χάνω ακρίβεια)

Ασταθής τρόπος!

(γ) $u^3 - v^3 = (u-v)(u^2+uv+v^2)$

$$\Rightarrow u - v = \frac{u^3 - v^3}{u^2+uv+v^2} = \frac{-2q}{u^2+v^2+p}$$

$\uparrow > 0$

Άσκηση 1.7 SOS

(a) $n \geq 3$

$$y_n = n \cdot \sin\frac{\pi}{n}$$

$$Y_n = n \cdot \tan\frac{\pi}{n}$$ (η περίμετρος ενός κανονικού πολυγώνου περιγεγραμμένου στον μοναδιαίο κύκλο)

$$y_n = \pi - \frac{\pi^3}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$Y_n = \pi + \frac{\pi^3}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

(όσο πιο μεγάλη δύναμη έχω τόσο καλύτερη προσέγγιση)

(Πρόταση Richardson extrapolation)

$$\left.\begin{aligned} 2y_n &= 2\pi - \frac{2\pi^3}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \\ Y_n &= \pi + \frac{\pi^2}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \end{aligned}\right\} +$$

$$\Rightarrow 2y_n + Y_n = 3\pi + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2y_n + Y_n}{3} = \pi + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Πως από προσεγγίσεις μιας ορισμένης τάξης "φτάνω" σε καλύτερε

Άσκηση 1.12

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a}\, dx \quad , \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

ⓐ Για $a > 0$ ΝΔΟ: $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γνήσια φθίνουσα μηδενική (δηλ $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$)

$x^{n+1} < x^n$, $0 < x \le 1$

$$\boxed{\begin{aligned} &x < 1 \\ &\Rightarrow x \cdot x^n < x^n \\ &\Rightarrow x^{n+1} < x^n \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \frac{x^{n+1}}{x+a} < \frac{x^n}{x+a} \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+a}\, dx < \int_0^1 \frac{x^n}{x+a}\, dx$$

$\Rightarrow y_{n+1} < y_n \Rightarrow$ γνήσια φθίνουσα

$$0 \le y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\underbrace{x+a}_{\ge a}}\, dx \le \int_0^1 \frac{x^n}{a}\, dx$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{a}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow 0 \le y_n < \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n+1}$$

τείνει: $0 \to 0$, $\quad \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n+1} \to 0$, $n \to \infty$

$\Rightarrow y_n \to 0$, $n \to \infty$

$a_n \le y_n \le b_n$
αν: $\left.\begin{aligned} a_n &\to a \\ b_n &\to a \end{aligned}\right\} \Rightarrow$
$\Rightarrow y_n \to a$

(β) $a >> 1$

$$y_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \boxed{\binom{n}{k} a^k \frac{(1+a)^{n-k} - a^{n-k}}{n-k}} + (-a)^n \log \frac{1+a}{a}$$

ευσταθής; μεγάλος τουλάχιστον για ένα k!

$$\int_0^1 \frac{x^n}{x+a}\,dx \overset{w=x+a}{=}$$

$$\int_a^{1+a} \frac{(w-a)^n}{w}\,dw$$

με αυτόν τον τρόπο προκύπτει η απόδειξη

Άρα ένα τουλάχιστον ενδιάμεσο άθροισμα έχει μεγάλη απόλυτη τιμή. Το τελικό άθροισμα όμως έχει πολύ μικρή απόλυτη τιμή.

Συμπέρασμα: Ο αλγόριθμος είναι ασταθής.

(γ) Αναδρομικός τύπος:

$$y_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+a}\,dx = \log(x+a)\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \log(a+1) - \log a$$

$$= \log \frac{\alpha+1}{\alpha}$$

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a}\,dx \qquad \text{(θέλω να εμφανίσω } x^{n-1}\text{)}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+a) - a x^{n-1}}{(x+a)}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n-1}\cancel{(x+a)}}{\cancel{x+a}}\,dx - \int_0^1 \frac{a x^{n-1}}{x+a}\,dx$$

$$= \frac{1}{n} - a \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+a}\, dx$$

y_{n-1}

$$= \frac{1}{n} - a\, y_{n-1}$$

Άρα

$$\begin{cases} y_0 = \log \frac{a+1}{a} \\ y_n = \frac{1}{n} - a y_{n-1} \end{cases}$$

Ευστάθεια;

$$\left.\begin{aligned} y_n &= \frac{1}{n} - a\, y_{n-1} \\ \tilde{y}_n &= \frac{1}{n} - a\, \tilde{y}_{n-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_n - \tilde{y}_n = -a\,(y_{n-1} - \tilde{y}_{n-1})$$

$$\Rightarrow |y_n - \tilde{y}_n| = a\, |y_{n-1} - \tilde{y}_{n-1}|$$

$a \downarrow$ μεγάλο

Ασταθής αλγόριθμος