19/2/14

<u>Διαδικαστικά</u>

· Θεωρία: Τρίτη, Πέμπτη: 10-12
· Ασκήσεις: Παρασκευή: 12-13

17-21 Μαρτίου: όχι μάθημα

1η ΕΕ: Σάββατο, 5-4-14
2η ΕΕ: " 10-5-14
3η ΕΕ: " 31-5-14

<u>Η ύλη του μαθήματος συνοπτικά</u>

1. Αριθμητική κινητής υποδιαστολής
Σφάλματα στρογγύλευσης

Ευαισθησία αριθμητικών μεθόδων (και προβλημάτων) σε σφάλματα στρογγύλευσης

2. <u>Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων</u>

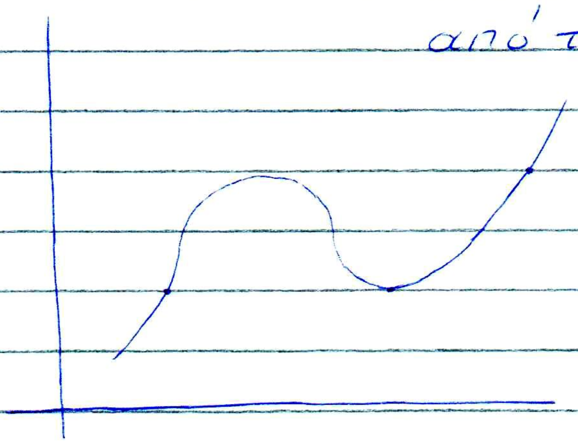
$f:[a,b] \to \mathbb{R}$
Ζητούνται ρίζες της f

3. <u>Γραμμικά συστήματα</u>

<u>Δεδομένα:</u> $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$
<u>Ζητούμενο:</u> $x \in \mathbb{R}^n$ τω $Ax=b$

4. Παρεμβολή

Δεδομένα: σημεία (x_i, y_i) $i = 1, \dots, n$
Ζητούμενο: Συνάρτηση "κατάλληλης μορφής" τ.ω. το γράφημά της να διέρχεται από τα (x_i, y_i)



5 Αριθμητική ολοκλήρωση

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ "ομαλή"

Ζητούμενο: $\int_a^b f(x)\,dx$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

$F' = f$
παράγουσα της f

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

1. Αριθμητική κινητής υποδιαστολής

Σφάλματα στρογγύλευσης

"Καλές" αριθμητικές μέθοδοι $\Rightarrow$ καλά αριθμ. αποτελέσματα

"Κακές" αριθμητικές μέθοδοι $\Rightarrow$ άσχημα αριθμητικά αποτελέσματα

Ποιότητα αριθμητικών μεθόδων

1. Απαιτούμενος χρόνος
2. Απαιτούμενη μνήμη
3. Ακρίβεια

1º Παράδειγμα

$$I_n := \int_0^1 x^n e^{x-1}\, dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

Ιδιότητες των I_n:

$$x^{n+1} < x^n \quad \forall x \in (0,1)$$

$$\Rightarrow x^{n+1} e^{x-1} < x^n e^{x-1}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^{n+1} e^{x-1}\, dx < \int_0^1 x^n e^{x-1}\, dx$$

$$\Rightarrow I_{n+1} < I_n$$

$(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ γνήσια φθίνουσα

Επίσης $I_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^1 x^n \underbrace{e^{x-1}}_{\leq 1}\, dx \leq \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{0 < I_{n+1} < I_n \leq \frac{1}{n+1}}$$

Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τα I_n;

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1}\,dx = \int_0^1 x^n \left(e^{x-1}\right)' dx$$

$$= \left[x^n e^{x-1}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 (x^n)' e^{x-1}\,dx$$

$$= 1 - n\underbrace{\int_0^1 x^{n-1} e^{x-1}\,dx}$$

$$I_n = 1 - n I_{n-1}, \quad n \geq 2$$

$$I_1 = 1 - \int_0^1 e^{x-1}\,dx = 1 - \left[e^{x-1}\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= 1 - (1 - e^{-1}) = \frac{1}{e}$$

$$\begin{cases} I_n = 1 - n I_{n-1}, & n = 2, 3, \dots \\ I_1 = \dfrac{1}{e} \end{cases}$$

$$\tilde{I}_1 \simeq I_1$$

Υπόθεση: Όλες οι άλλες πράξεις γίνονται ακριβώς.

$$\tilde{I}_n = 1 - n \tilde{I}_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Είναι "ευσταθής" αυτός ο αλγόριθμος;

Έχουμε: $\boxed{I_n - \tilde{I}_n = -n(I_{n-1} - \tilde{I}_{n-1})}$ (+)

Επαγωγικά: $I_n - \tilde{I}_n = (-1)^{n-1} n! (I_1 - \tilde{I}_1)$ (*)

Απόδειξη: $n=1$ η (*) σωστή

Βήμα της επαγωγής: $n \longrightarrow n+1$:

Σύμφωνα με την (+) ισχύει:

$$I_{n+1} - \tilde{I}_{n+1} = -(n+1)\underbrace{(I_n - \tilde{I}_n)}_{\substack{\text{Υπόθεση} \\ \text{επαγωγής}\ =\ (-1)^{n-1} n! (I_1 - \tilde{I}_1)}}$$

$$= (-1)^{\overset{(n+1)-1}{\overset{\shortparallel}{n}}} (n+1)! \, (I_1 - \tilde{I}_1)$$

$$I_n - \tilde{I}_n = (-1)^{n-1} n! \, (I_1 - \tilde{I}_1)$$

$$\Rightarrow |I_n - \tilde{I}_n| = \underbrace{n!}_{\substack{\text{πολύ} \\ \text{μεγάλος} \\ \text{αριθμός}}} |I_1 - \tilde{I}_1|$$

Άρα ο αλγόριθμος είναι ασταθής!

Υπάρχει εναλλακτικός τρόπος;

$$I_{n-1} = \frac{1 - I_n}{n}$$

Αν $\tilde{I}_{n-1} = \dfrac{1-\tilde{I}_n}{n}$

$$\Rightarrow I_n - \tilde{I}_n = (-1)^{n-m} \frac{1}{(n+1)\cdot \ldots (m-1)m} (I_m - \tilde{I}_m)$$

$$\Rightarrow \left| I_n - \tilde{I}_n \right| = \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots m} \left| I_m - \tilde{I}_m \right|$$

Το σφάλμα συνεχώς μικραίνει!

Αν θέλω να βρω το I_n από που θα ξεκινήσω;

Για $m > n$, πώς προσεγγίζω το I_m;

Ξέρουμε ότι $0 < I_m \leq \dfrac{1}{m+1}$

Επιλέγοντας $\tilde{I}_m = 0$, έχουμε $\left| I_m - \tilde{I}_m \right| \leq \dfrac{1}{m+1}$

20/2/14

Μάθημα

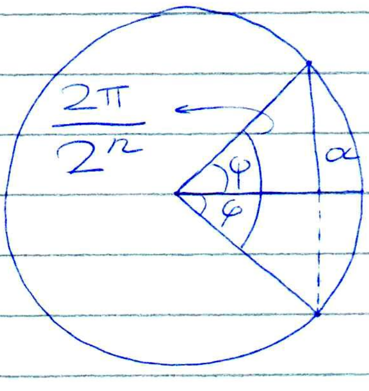
Τετάρτη 5-3-14
Ώρες: 12-14

2º Παράδειγμα: προσέγγιση του π με τη μέθοδο του Αρχιμήδη

$y_n := 2^n \sin\frac{\pi}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}$

· $y_1 = 2 \sin\frac{\pi}{2} = 2$

· $y_n, \quad n \geq 2$



$\varphi = \frac{\pi}{2^n}, \quad \alpha = \sin\frac{\pi}{2^n}$

πλευρά του κανονικού πολυγώνου με 2^n πλευρές εγγεγραμμένου στο μοναδιαίο κύκλο

$2\varphi = \frac{2\pi}{2^n}, \quad 2\alpha = 2\sin\frac{\pi}{2^n}$

Περίμετρος: $2^n \, 2\alpha = 2^{n+1} \sin\frac{\pi}{2^n} = 2 y_n$

y_n = ημιπερίμετρος του κανονικού...

Γεωμετρικό συμπέρασμα:

$2 \leq y_n < y_{n+1} < \pi$
και $y_n \to \pi, \quad n \to \infty$

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$$

$$y_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n} = 2^n\, 2 \sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$= \underbrace{2^{n+1} \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}_{\substack{\parallel \\ y_{n+1}}} \; \underbrace{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}_{0 < \quad < 1}$$

$$\Longrightarrow y_n < y_{n+1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \overset{\beta > 0}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\beta x)}{\beta x} = 1$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\beta x)}{x} = \beta}$$

$$y_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n} = \frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} y_n = \pi}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$y_{n+1} = 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} = 2^{n+1}\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{2^n}}{2}}$$

$$= 2^{n+1}\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^n}}}{2}}$$

$$y_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{2^n} = 2^{-n} y_n$$

$$= 2^{n+1}\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}}{2}}$$

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_{n+1} = 2^{n+1}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}\right)}, \quad n=1,2,\dots \end{cases}$$

Ασταθής αλγόριθμος

$$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = \frac{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$$

$$= \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$$

$$1-\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2} = \frac{(2^{-n}y_n)^2}{1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}}$$

$$y_{n+1} = 2^{n+1} \cancel{2^{-n}} \sqrt{\frac{1}{2\left(1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}\right)}}\, y_n$$

$$= 2\sqrt{\frac{1}{2\left(1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}\right)}}\, y_n$$

$$= \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}}}\, y_n$$

<u>Παράσταση αριθμών ως προς οποιαδήποτε βάση</u>

<u>Καθημερινή ζωή:</u> <u>Δεκαδικό σύστημα</u>

<u>Βάση:</u> 10

<u>Ψηφία:</u> 0, 1, 2, ..., 9

<u>Παράδειγμα:</u>

$$3.14159 = 3\cdot 10^{0} + 1\cdot 10^{-1} + 4\cdot 10^{-2} + 1\cdot 10^{-3} + 5\cdot 10^{-4} + 9\cdot 10^{-5}$$

<u>Γενικά:</u> Έστω $\alpha_N, \alpha_{N-1}, \ldots, \alpha_0, \alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \ldots$ ψηφία του δεκαδικού συστήματος

Τότε

$$(\alpha_N \alpha_{N-1} \dots \alpha_1 \alpha_0 . \alpha_{-1} \alpha_{-2} \dots)_{10}$$

$$= \boxed{\alpha_N 10^N + \alpha_{N-1} 10^{N-1} + \dots + \alpha_1 10^1 + \alpha_0 10^0} + \alpha_{-1} 10^{-1} + \alpha_{-2} 10^{-2} + \dots$$

<u>Ακέραιο μέρος:</u>

$$p(x) = \alpha_N x^N + \alpha_{N-1} x^{N-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

Τότε το $\alpha_N \alpha_{N-1} \dots \alpha_0$ είναι η τιμή του p στο $x = 10$

<u>Κλασματικό μέρος:</u> $.\alpha_{-1} \alpha_{-2} \dots$

Είναι η τιμή της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k} x^k$ για $x = \frac{1}{10}$

Η σειρά μπορεί να έχει είτε πεπερασμένο είτε άπειρο πλήθος όρων.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega^i = \frac{\overset{\text{πρώτος όρος}}{\omega}}{1 - \underset{\text{λόγος}}{\omega}} \qquad \boxed{|\omega| < 1}$$

<u>Μοναδικότητα της παράστασης</u>

$$4.12\overline{9} = 4.1299999\dots$$
$$= 4.130$$

$$9 \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i} = 9 \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

$$\frac{1}{3} = 0.333333\ldots$$

Για μοναδικότητα απαιτούμε

$\forall k_0 \in \mathbb{N} \ \exists k > k_0$ τ.ω. $\alpha_{-k} \neq 9$

Σύστημα με βάση β:

Βάση: β

Ψηφία: $0, 1, 2, \ldots, \beta - 1$

α_k ψηφία

$$\pm(\alpha_N \alpha_{N-1} \ldots \alpha_1 \alpha_0 . \alpha_{-1} \alpha_{-2} \ldots)_\beta$$

$$= \pm(\alpha_N \beta^N + \alpha_{N-1} \beta^{N-1} + \ldots + \alpha_1 \beta^1 + \alpha_0 \beta^0 + \alpha_{-1} \beta^{-1} + \alpha_{-2} \beta^{-2} + \ldots)$$

Παράδειγμα: $(100110.11)_2$

$$= 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$$

$$= (38.75)_{10}$$

25/2/14

2ο Μάθημα Αναπλήρωσης

1. Τετάρτη, 26-3-14 ✓
Ή
2. Τετάρτη, 12-3-14 ✗

Ώρες: 12-14

Μετατροπή αριθμών από ένα σύστημα σε ένα άλλο

i. Μετατροπή από ένα σύστημα με βάση β στο δεκαδικό

(πράξεις)

a) Μετατροπή ακεραίων

Παράδειγμα

$(53473)_8 = 5 \cdot 8^4 + 3 \cdot 8^3 + 4 8^2 + 7 \cdot 8 + 3$

$= 3 + 8(7 + 8(4 + 8(3 + 5 \cdot 8)))$
$= \ldots = (22331)_{10}$

"Σχήμα του Horner"

$p(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

$= a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \ldots + x(a_{N-1} + x a_N)\ldots)$

$$\boxed{y = p(x)}$$

$y \leftarrow a_N$
για $i = N-1, \dots, 0$:
$$\boxed{y \leftarrow a_i + xy}$$

$y \leftarrow a_i + xy$
flop
(floating point operation)

Το σχήμα του Horner απαιτεί N flop.

β) Μετατροπή Κλασματικών Αριθμών

$0 < x < 1$

Παράδειγμα

$$(0.11)_2 = 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = (0.75)_{10}$$

ii) Μετατροπή από το δεκαδικό σε σύστημα με βάση B

α) Ακεραίων αριθμών

Βασίζεται στον αλγόριθμο της διαίρεσης

Παράδειγμα: $(369)_{10} \rightsquigarrow$ στο οκταδικό σύστημα

$$(369)_{10} = (\dots a_2 a_1 a_0)_8$$
$$= a_0 + 8(a_1 + 8(a_2 + \dots))$$

Συμπέρασμα: α_0 το υπόλοιπο της διαίρεσης 369 : 8

$\alpha_1 + 8(\alpha_2 \ldots)$ πηλίκο της διαίρεσης 369 : 8

$$\begin{array}{r|l} 369 & 8 \\ \hline 49 & 46 \\ 1 & \end{array}$$

Άρα $\boxed{\alpha_0 = 1}$

και $46 = \alpha_1 + 8(\alpha_2 + \ldots)$

$$\begin{array}{r|l} 46 & 8 \\ \hline 6 & 5 \end{array}$$

Άρα $\boxed{\alpha_1 = 6}$

και $5 = \alpha_2 + 8(\alpha_3 + \ldots)$

$\Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 5}$ $\alpha_3 = \ldots = 0$

$(369)_{10} = (561)_8$

Επαλήθευση: $(561)_8 = 5 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8^1 + 1 = 369$

β) Κλασματικών αριθμών

$0 < x < 1$ στο δεκαδικό σύστημα

$x = (.\alpha_{-1}\alpha_{-2}\ldots)_\beta$

$= \alpha_{-1}\beta^{-1} + \alpha_{-2}\beta^{-2} + \ldots$

$\Rightarrow \beta x = \alpha_{-1} + \alpha_{-2}\beta^{-1} + \ldots$

ακέραιο μέρος
του βx

Παράδειγμα: $x = (.372)_{10}$ → στο δυαδικό σύστημα

$$(.372)_{10} = (.\alpha_{-1}\alpha_{-2}\ldots)_2$$

Έχουμε: $2x = 0.744$, άρα $\alpha_{-1} = 0$ και $\gamma_1 := 0.744$

$2\gamma_1 = 1.488$, άρα $\alpha_{-2} = 1$ και $\gamma_2 := 0.488$

$2\gamma_2 = 0.976$, άρα $\alpha_{-3} = 0$ και $\gamma_3 := 0.976$

$2\gamma_3 = 1.952$, άρα $\alpha_{-4} = 1$ και $\gamma_4 := 0.952$

$\vdots$

Παρατήρηση: Στην παράσταση κλασματικών αριθμών είναι δυνατόν σε κάποιο σύστημα να αρκεί πεπερασμένο πλήθος ψηφίων και σε άλλο σύστημα να χρειάζεται άπειρο!

Παράδειγμα:

Ισχυρισμός: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{4n}} + \frac{1}{2^{4n+1}}\right) = \frac{1}{10}$

$$\Rightarrow \frac{1}{10} = \underbrace{2^{-4} + 2^{-5}}_{n=1} + 2^{-8} + 2^{-9} + 2^{-12} + 2^{-13} + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{4n}} + \frac{1}{2^{4n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2^{4n}}$$

$$= \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^4}\right)^n = \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2^4}}{1 - \frac{1}{2^4}}$$

$$= \frac{3}{2} \frac{\frac{1}{16}}{\frac{15}{16}} = \frac{\cancel{3}^{1}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{15}_{5}} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow (0.1)_{10} = 0.0001100 \mid 11001100\ldots$$

$$(0.1)_{10} = (0.000\overline{1100})_2$$

<u>Αριθμοί μηχανής</u>

Έστω $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

Σε ένα σύστημα με βάση β, ο x μπορεί να γραφεί ως:

$$(*) \quad x = \pm \, . d_1 d_2 \ldots \; \beta^e \quad \text{με} \quad \boxed{d_1 \neq 0}$$

d_i ψηφία ως προς βάση β και e κατάλληλος ακέραιος.

Η μορφή $(*)$ λέγεται <u>κανονική μορφή κινητής υποδιαστολής</u>

Το σύνολο των αριθμών μηχανής

$M = M(\beta, t, L, U)$

χαρακτηρίζεται από 4 παραμέτρους:

- β = βάση του αριθμητικού συστήματος
- t = ακρίβεια = πλήθος των ψηφίων του κλάσματος των αριθμών
- L = κάτω φράγμα
- U = άνω φράγμα

$\left.\begin{array}{l} L = \text{κάτω φράγμα} \\ U = \text{άνω φράγμα} \end{array}\right\}$ του εκθέτη e του β.

• $(L \leq e \leq U)$: L, U ακέραιοι και
$L \approx -U$

Κάθε $x \in M$, $x \neq 0$, είναι της μορφής

(+) $x = \pm .d_1 d_2 \ldots d_t \cdot \beta^e$

με $d_1 \neq 0$ και $L \leq e \leq U$

Το M δηλαδή αποτελείται από τους αριθμούς της μορφής (+) και το μηδέν.

Το M είναι πεπερασμένο σύνολο

Μέγιστο στοιχείο του M: $d_i = \beta - 1$, $i = 1, \ldots, t$, και $e = U$

Αριθμός με την ελάχιστη, μη μηδενική, απόλυτη τιμή: $d_1 = 1$, $d_2 = \ldots = d_t = 0$ και $e = L$

Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών στοιχείων του M δεν είναι σταθερή.

Το M δεν είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό, δηλαδή: $x, x^* \in M \not\Rightarrow xx^* \in M$

Παράδειγμα:

$$\underbrace{\underbrace{0.100\ldots0 \cdot \beta^L}_{\in M} \times \underbrace{0.100\ldots0 \cdot \beta^L}_{\in M}}_{\notin M}$$

Το M δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση:
$x, x^* \in M \not\Rightarrow x + x^* \in M$

Παράδειγμα: $\beta = 10$, $t = 5$

$1,\ 10^{-5} \in M$
$1 + 10^{-5} = \underbrace{1.00001}_{\notin M}$

Μας ενδιαφέρει το M να είναι όσο πιο πυκνό και όσο πιο ευρύ γίνεται, δηλαδή να έχει:
- μεγάλο t
- μεγάλο διάστημα $[L, U]$

5/3/14

<u>Προσέγγιση αριθμών με αριθμούς μηχανής</u>

x πραγματικός αριθμός

i) $|x| > .d_1 \dots d_t \cdot \beta^{u}$ με $d_1 = \dots = d_t = \beta - 1$

το μεγαλύτερο στοιχείο του M

<u>υπερχείλιση</u> (overflow)

Οι πράξεις σταματούν!

ii) $0 < |x| < \underbrace{.1000\dots0 \cdot \beta^{L}}$

ο μικρότερος σε απόλυτη τιμή μη μηδενικός αριθμός μηχανής

<u>υπεκχείλιση</u> (underflow)

Κατά κανόνα το x προσεγγίζεται με το <u>μηδέν</u> και οι υπολογισμοί συνεχίζονται

iii) $.1 \cdot \beta^{L} \leq |x| \leq$ μέγιστο στοιχείο του M.

<u>Ο x προσεγγίζεται με ένα $fl(x) \in M$</u>

<u>Συνήθως</u> το $fl(x)$ είναι τέτοιο ώστε:

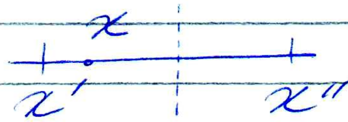
<u>$\forall y \in M$</u> $|x - fl(x)| \leq |x - y|$ $(*)$

<u>Ισχυρισμός:</u> Αν ισχύει η $(*)$, τότε

$$(+) \quad \underbrace{\left| \frac{fl(x) - x}{x} \right|}_{\text{σχετικό σφάλμα}} \leq \frac{1}{2} \cdot \beta^{1-t}$$

Απόδειξη

i. $x \in M$
Τότε το σχετικό σφάλμα είναι μηδέν, άρα η (+) ισχύει.

ii. $x \notin M$ Τότε υπάρχουν διαδοχικοί αριθμοί $x', x'' \in M$ τ.ω. $x' < x < x''$
Προφανώς τότε:
$$\left| fl(x) - x \right| \leq \frac{1}{2} \left| x'' - x' \right|$$


Άρα:
$$\left| \frac{fl(x) - x}{x} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{|x'' - x'|}{|x|}$$

Έστω χ.π.τ.γ. $x > 0$
οπότε

$x = .d_1 d_2 \ldots d_t d_{t+1} \ldots \beta^k$
$d_1 \neq 0$
Τότε
$x' = .d_1 d_2 \ldots d_t \cdot \beta^k$
$x'' = (.d_1 d_2 \ldots d_t + \beta^{-t}) \cdot \beta^k$

Επομένως $x'' - x' = \beta^{k-t}$

(Η διαφορά διαδοχικών αριθμών μηχανής εξαρτάται από το k)

Επομένως, $\left| \frac{fl(x) - x}{x} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{\beta^{k-t}}{x}$

$x \geq .1 \cdot \beta^k = \beta^{k-1}$

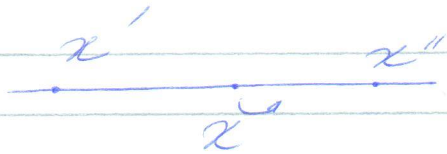
Άρα

$$\left|\frac{fl(x)-x}{x}\right| \leq \frac{1}{2}\,\frac{\beta^{k-t}}{\beta^{k-1}} = \frac{\beta^{1-t}}{2}$$

Στρογγύλευση

π.χ. $\beta = 10,\ t = 5$

$x = .\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_5 \,|\, \alpha_6\ldots \cdot 10^k$



· Αν $\alpha_6 \geq 5$ τότε $fl(x) = x'' = (.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_5 + 10^{-5})\cdot 10^k$

· Αν $\alpha_6 < 5$ τότε $fl(x) = x' = .\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_5 \cdot 10^k$

(Αν $\alpha_6 = 5$ και $\alpha_7 = \alpha_8 = \ldots = 0$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε είτε $fl(x) = x'$ είτε $fl(x) = x''$)

Εναλλακτικά: αποκοπή

π.χ. $fl(x) = x' = .\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_5 \cdot 10^k$

(αποκόπτουμε όλα τα ψηφία μετά την πέμπτη θέση)

Τότε

$$\left|\frac{fl(x)-x}{x}\right| \leq \beta^{1-t}$$

χωρίς το $\frac{1}{2}$

$$\left|\frac{fl(x)-x}{x}\right| \leq u$$

$u = \frac{1}{2}\beta^{1-t}$ στη στρογγύλευση

$u = \beta^{1-t}$ στην αποκοπή

u = μοναδιαίο σφάλμα "στρογγύλευσης"

<u>Πράξεις</u> $* \in \{+, -, \times, :\}$

$x * y$

<u>Υπόθεση:</u> $fl(fl(x) * fl(y))$

<u>Παράδοξα:</u> $\beta = 10,\ t = 5,\ U = -L = 10$

<u>στρογγύλευση</u>

$a_1 = 1,\ a_2 = a_3 = 3 \cdot 10^{-5}\ (a_i \in M)$

Τότε
$fl(a_1 + a_2) = fl(1.00003) = 1$

Επίσης:
$fl(fl(a_1 + a_2) + a_3) = 1$

$fl(a_2 + a_3) = 6 \cdot 10^{-5}$
$fl(a_1 + fl(a_2 + a_3))$
$= fl(1.00006) = 1.0001$

Άρα έχει σημασία η σειρά με την οποία γίνονται οι προσθέσεις!

Γενικά, στη στρογγύλευση, ισχύει
$fl(1+x)=1$, αν $|x|<\frac{1}{2}\beta^{1-t}$

$\frac{1}{2}\beta^{1-t}$: μηδέν της μηχανής
έψιλον της μηχανής

Επιρροή των σφαλμάτων στρογγύλευσης στους υπολογισμούς

$$\frac{fl(fl(x)*fl(y))-x*y}{x*y}$$

Τί μπορούμε να πούμε για αυτό το σχετικό σφάλμα;

$$\left|\underbrace{\frac{fl(x)-x}{x}}_{=:\varepsilon}\right| \leq u \Rightarrow fl(x)=x(1+\varepsilon) \text{ με } |\varepsilon|\leq u$$

εξαρτάται από το x. Δεν το γνωρίζουμε!

$$\Rightarrow fl(x)-x=x\varepsilon$$

α) $fl(x)=x(1+\varepsilon),\ |\varepsilon|\leq u$

β) Αν ε_i τ.ω. $|\varepsilon_i|\leq u$, τότε υπάρχει ε με $|\varepsilon|\leq u$ τ.ω.

$$\prod_{i=1}^{m}(1+\varepsilon_i)=(1+\varepsilon)^m$$

6/3/14

Επίδραση των σφαλμάτων στρογγύλευσης στους υπολογισμούς

$* \in \{+, -, \times, :\}$
x, y στο εύρος των αριθμών μηχανής

Πρόβλημα: Τί μπορούμε να πούμε για το σχετικό σφάλμα

$$\frac{fl(fl(x) * fl(y)) - x * y}{x * y} \;;$$

Παρατηρήσεις

α) $fl(x) = x(1+\varepsilon)$ με $|\varepsilon| \leq u$

β) Αν ε_i τ.ω. $|\varepsilon_i| \leq u$, $i = 1, \dots, m$, τότε υπάρχει ε τ.ω. $|\varepsilon| \leq u$ και

$$\prod_{i=1}^{m} (1+\varepsilon_i) = (1+\varepsilon)^m$$

$$(*) \quad (1-u)^m \leq \prod_{i=1}^{m} (1+\varepsilon_i) \leq (1+u)^m$$

$f : [-u, u] \longrightarrow \mathbb{R}$
$f(x) = (1+x)^m$
f συνεχής

Σύμφωνα με την (*)

$$f(-u) \le \prod_{i=1}^{m} (1+\varepsilon_i) \le f(u)$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής, έχουμε:

$$\prod_{i=1}^{m} (1+\varepsilon_i) = \underbrace{f(\varepsilon)}_{(1+\varepsilon)^m}, \text{ με } \underbrace{-u \le \varepsilon \le u}_{|\varepsilon| \le u}$$

$$fl(x) = x(1+\varepsilon_1), \quad fl(y) = y(1+\varepsilon_2)$$

<u>Πολλαπλασιασμός</u>

$$|\varepsilon_i| \le u$$
$$|\varepsilon| \le u$$

$$z = fl\,(\underbrace{fl(x)\,fl(y)}) $$
$$= xy(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)$$
$$= xy(1+\varepsilon)^3$$

$$\frac{z-xy}{xy} = \frac{xy(1+\varepsilon)^3 - xy}{xy} = (1+\varepsilon)^3 - 1$$

$$= 1 + 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - 1$$
$$= 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3$$

$$\Rightarrow \left|\frac{z-xy}{xy}\right| = \left|3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3\right|$$

$$\leq 3u + \underbrace{3u^2 + u^3}_{O(u^2)}$$

πολύ μικρότερο του u

<u>Συμπέρασμα:</u> <u>Το σχετικό σφάλμα στον πολλαπλασιασμό είναι **περίπου** τριπλάσιο του μοναδιαίου σφάλματος στρογγύλευσης</u>

<u>Διαίρεση</u>

$$z = fl\left(\frac{fl(x)}{fl(y)}\right) = \frac{x(1+\varepsilon_1)}{y(1+\varepsilon_2)}(1+\varepsilon_3)$$

$$\boxed{\frac{1}{1+\varepsilon_2} = 1+\delta \Rightarrow \delta = -\frac{\varepsilon_2}{1+\varepsilon_2}}$$

$$z = \frac{x}{y}\underbrace{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)}_{(1+\varepsilon)^2}(1+\delta)$$

$$\frac{z-\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}} = (1+\varepsilon)^2(1+\delta) - 1 \Rightarrow$$

$$|\delta| \leq \frac{u}{1-u} = u(1+u+u^2+\dots)$$
$$= u + O(u^2)$$

$$\left|\frac{z - \frac{x}{y}}{\frac{x}{y}}\right| = \left|\underline{\delta + 2\varepsilon} + \varepsilon^2 + \varepsilon^2\delta + 2\varepsilon\delta\right|$$

$$\leq 3u + \alpha$$
$$\alpha = O(u^2)$$

<u>Πρόσθεση – Αφαίρεση</u>

$$z = fl\big(fl(x) + fl(y)\big)$$

$$= \left[x(1+\varepsilon_1) + y(1+\varepsilon_2)\right](1+\varepsilon_3)$$

$$= x\underbrace{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)}_{(1+\varepsilon)^2} + y\underbrace{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)}_{(1+\delta)^2} \quad \Big| \; |\varepsilon|, |\delta| \leq u$$

$$= x(1+2\varepsilon+\varepsilon^2) + y(1+2\delta+\delta^2)$$
$$= (x+y) + 2(\varepsilon x + \delta y) + (\underbrace{\varepsilon^2 x + \delta^2 y}_{= O(u^2)})$$

$$\simeq (x+y) + 2(\varepsilon x + \delta y)$$

$$z - (x+y) \simeq 2(\varepsilon x + \delta y) \Rightarrow$$

$$\left|\frac{z-(x+y)}{x+y}\right| \simeq 2\frac{|\varepsilon x + \delta y|}{|x+y|} \leq 2\frac{|x|+|y|}{|x+y|}u$$

<u>1^{η} Περίπτωση:</u> x, y ομόσημοι

Τότε $\dfrac{|x|+|y|}{|x+y|} = 1$

Το σφάλμα είναι το πολύ $2u$.

<u>2^{η} Περίπτωση:</u> x, y ετερόσημοι

Στη χειρότερη περίπτωση έχουμε
$\varepsilon \approx -\delta$ και $|\varepsilon| \approx u$, τότε

$$\left| \frac{z-(x+y)}{x+y} \right| \approx 2 \frac{|x-y|}{|x+y|}$$

Αν τα x και y είναι πολύ κοντά μεταξύ τους και κάνουμε αφαίρεση τότε το σχετικό σφάλμα μπορεί να είναι πολύ μεγάλο

<u>Καταστροφή επιρροή των σφαλμάτων στρογγύλωσης στην αφαίρεση σχεδόν ίσων αριθμών</u>

<u>Παράδειγμα:</u> $\beta = 10,\ t = 5,\ U = -L = 10$
στρογγύλωση

$x = .\boxed{45142}708,\ y = -.\boxed{45115}944$

$x+y = .26764 \cdot 10^{-3}$

$z = fl(fl(x)+fl(y))$
$= fl(.\boxed{451}43 - .\boxed{451}16)$
$= .00027 = .27\boxed{000} \cdot 10^{-3}$

η αφαίρεση σχεδόν ίσων αριθμών πρέπει να α-
ποφεύγεται, ή τουλάχιστον να γίνεται με μεγα-
λύτερη ακρίβεια, π.χ. με διπλή ακρίβεια.

<u>Παραδείγματα:</u> $\beta=10,\ t=10$

1ο $\sqrt{7298}-\sqrt{7297} = .562847\underbrace{0000}_{\text{κακή προσέγγιση}}\cdot 10^{-2}$

$$\sqrt{x}-\sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

Τότε

$$\sqrt{7298}-\sqrt{7297} = \frac{1}{\sqrt{7248}+\sqrt{7297}}$$

$$= .562846\overline{8914}\cdot 10^{-2}$$

καλή προσέγγιση

2ο $f(x) = x - \underline{\sin x}$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τιμές της f για $|x|$ μικρό

Ξέρουμε ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x), \quad |\varepsilon(x)| \leq \frac{|x|^5}{120}$$

Επομένως $f(x) \simeq \dfrac{x^3}{6}$

Σφάλματα στον υπολογισμό αθροισμάτων

Παράδειγμα

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Έχουμε $\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

οπότε

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 1 + \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = 2 - \frac{1}{n+1}$$

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ γνήσια αύξουσα

και $S_n \to 2$, $n \to \infty$

π.χ. για $n = 9999$, έχουμε

$$S_{9999} = 1.9999$$

1ος τρόπος:

$$S_0 = 1, \quad S_k = S_{k-1} + \frac{1}{k(k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Αποτέλεσμα υπολογιστή: $\beta = 10$, $t = 10$

$$\tilde{S}_{9999} = 1.999\boxed{899972}$$

λάθος ψηφία

Εδώ αθροίσαμε από τον μεγαλύτερο όρο προς τον μικρότερο

2ος τρόπος: Υπολογίζουμε το άθροισμα αθροίζοντας από τον μικρότερο όρο προς τον μεγαλύτερο

$$\begin{cases} T_0 = \dfrac{1}{n(n+1)} \\[2ex] T_k = T_{k-1} + \dfrac{1}{(n-k)(n-k+1)}, \quad k = 1, \ldots, n-1 \\[2ex] T_n = T_{n-1} + 1 \end{cases}$$

Τότε $T_n = S_n$

Αποτέλεσμα του υπολογιστή μας:

$$\tilde{T}_{9999} = 1.9999000\ldots0$$
$$= S_{9999}$$

Ερώτημα: Γιατί είναι καλύτερο το αποτέλεσμα με τον δεύτερο τρόπο;

Πως πρέπει να υπολογίζουμε γενικά αθροίσματα;

Πρόβλημα: Έστω $a_1, \dots, a_N \in M$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα:

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_N$$

Παράσταση: Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $|\varepsilon_i| \leq u$, $i = 1, 2$, τότε υπάρχει ένα ε_3, με $|\varepsilon_3| \leq u$ τω.

$$\lambda \varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2 = (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon_3$$

Θέτω $\varepsilon_3 := \dfrac{\lambda \varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2}{|\lambda| + |\mu|}$

και έχουμε

$$|\varepsilon_3| \leq \frac{|\lambda||\varepsilon_1| + |\mu||\varepsilon_2|}{|\lambda| + |\mu|} \leq \frac{|\lambda| u + |\mu| u}{|\lambda| + |\mu|} = u$$

Αλγόριθμος:

$$\begin{cases} S_1 = a_1 \\ S_k = S_{k-1} + a_k, \quad k = 2, \dots, N \end{cases}$$

Λαμβάνουμε προσεγγίσεις:

$$\begin{cases} \tilde{S}_1 = a_1 \\ \tilde{S}_k = fl(\tilde{S}_{k-1} + a_k), \quad k = 2, \dots, N \end{cases}$$

Έχουμε

$$\tilde{S}_2 = fl(\underset{=S_1=a_1}{\tilde{S}_1} + a_2)$$

$$= fl(S_2) = S_2(1+\delta)$$

$$= S_2 + S_2\delta \quad |\delta| \le u$$

$$\tilde{S}_3 = fl(\tilde{S}_2 + a_3) = fl(\underbrace{S_2 + a_3}_{S_3} + S_2\delta)$$

$$= fl(S_3 + S_2\delta) = (S_3 + S_2\delta)(1+\delta')$$

$$|\delta'| \le u$$

$$= S_3 + S_2\delta + S_3\delta' + S_2\delta\delta'$$

$$\approx S_3 + S_2\delta + S_3\delta'$$

$$\tilde{S}_3 \approx S_3 + \underbrace{S_2\delta + S_3\delta'}_{\le}$$

$$(|S_2| + |S_3|)\varepsilon, \quad |\varepsilon| \le u$$

$$\tilde{S}_3 \approx S_3 + (|S_2| + |S_3|)\varepsilon_3$$

<u>Γενικά:</u>

$$\tilde{S}_k \approx S_k + (|S_2| + |S_3| + \dots + |S_k|)\,\varepsilon_k \quad |\varepsilon_k| \le u$$

Για $u = N$

$$\tilde{S}_N \approx S_N + (|S_2| + |S_3| + \dots + |S_N|)\,\varepsilon_N \text{ με } |\varepsilon_N| \le u$$

11/3/2014

Πρόβλημα: Έστω $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in M$.

Ζητούμενο: $S_N = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$

Αλγόριθμος: $S_1 = \alpha_1$

$S_k = S_{k-1} + \alpha_k, \quad k = 2, \ldots, N$

Αποτελέσματα στον υπολογιστή: $\tilde{S}_1 = \alpha_1$

$\tilde{S}_k = fl(\tilde{S}_{k-1} + \alpha_k)$

$k = 2, \ldots, N$

Τότε

$$\tilde{S}_N \approx S_N + (|S_2| + |S_3| + \ldots + |S_N|)\varepsilon_N$$

με $|\varepsilon_N| \leq u$

με σφάλμα της τάξης $O(u^2)$

Επομένως

$$\frac{\tilde{S}_N - S_N}{S_N} \approx \frac{|S_2| + |S_3| + \ldots + |S_N|}{S_N}\varepsilon_N$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\tilde{S}_N - S_N}{S_N}\right| \approx \frac{|S_2| + |S_3| + \ldots + |S_N|}{|S_N|}\underbrace{|\varepsilon_N|}_{\leq u}$$

$$\leq \frac{|S_2| + |S_3| + \ldots + |S_N|}{|S_N|}u$$

Συμβολισμός: $\gamma_N := |S_2| + \dots + |S_N|$

$$\rho_N := \frac{\gamma_N}{|S_N|}$$

ρ_N: <u>συντελεστής μετάδοσης</u> του σχετικού σφάλματος στρογγύλευσης στον αλγόριθμό μας.

Προφανώς $\rho_N \geq 1$

Αν το ρ_N είναι πολύ μεγάλο, τότε ο αλγόριθμος είναι ασταθής, π.χ. αυτό συμβαίνει αν κάποιο από τα ενδιάμεσα αθροίσματα S_k ~~είναι~~ έχει πολύ μεγαλύτερη απόλυτη τιμή από το τελικό αποτέλεσμα.

<u>Ειδική περίπτωση</u>: $a_i > 0$, $i = 1, \dots, N$

$$\gamma_N = S_2 + S_3 + \dots + S_N$$

$$= (N-1)a_1 + (N-1)a_2 + (N-2)a_3 + \dots + 2a_{N-1} + a_N$$

Το γ_N παίρνει την ελάχιστη τιμή του (για δεδομένους αριθμούς $a_1, \dots, a_N$)

$$a_1, a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \dots \leq a_N$$

χειρότερη επιλογή

$\alpha_1, \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4 \geq \ldots \geq \alpha_N$

<u>Παράδειγμα:</u> Προσέγγιση του e^{-x} για $x \gg 1$

$$S_N(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots (-1)^{N-1} \frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$$

Για αρκετά μεγάλο N έχουμε $S_N(x) \approx e^{-x}$

Για $x = 100$ έχουμε: $S_2 = -99$,

$S_3 = 4901$, $S_4 = -161766 \ldots$

παταγώδης αποτυχία!

<u>Εναλλακτικά:</u> $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots}$

<u>Ευστάθεια αλγορίθμων</u>

Ένας αλγόριθμος λέγεται ασταθής αν είναι ευαίσθητος σε σφάλματα στρογγύλευσης, δηλαδή αν <u>μικρά σφάλματα</u> που γίνονται κατά την παράσταση των αριθμών και στις πράξεις, είναι δυνατόν να επιφέρουν μεγάλες μεταβολές στο τελικό αποτέλεσμα

Ένας αλγόριθμος λέγεται <u>ευσταθής</u>, αν τα τελικά αποτελέσματά του δεν επηρεάζονται πολύ από τα <u>μικρά</u> σφάλματα στρογγύλευσης.

<u>Παραδείγματα</u> e^{-x}, $x >> 1$

$$S_N(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^{N-1}\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$$

<u>ασταθής!</u>

$$\frac{1}{e^x} \qquad S'_N(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$$

$$\frac{1}{e^x} \simeq \frac{1}{S_N(x)}$$

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1}\,dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{e} \\ I_n = 1 - n I_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

<u>ασταθής</u>

$$y_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$y_1 = 2$$

$$y_{n+1} = 2^{n+1}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}\right)}, \quad n=1,2,\dots$$

ασταθής!

$$y_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}}}, \quad \text{ευσταθής}$$

Κατάσταση προβλημάτων

Λέμε ότι ένα πρόβλημα έχει καλή κατάσταση, αν μικρές μεταβολές στα δεδομένα του έχουν ως συνέπεια μικρή μεταβολή της λύσης

Λέμε ότι ένα πρόβλημα έχει κακή κατάσταση, αν είναι δυνατόν μικρές μεταβολές στα δεδομένα του να επιφέρουν μεγάλη μεταβολή στη λύση

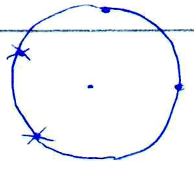
Παράδειγμα: $(x-2)^6 = 0$

$$x^* = 2$$

$$(x-2)^6 = 10^{-6} \Rightarrow x_k = 2 + \frac{1}{10} e^{\frac{2i\pi k}{6}}$$

$$k = 0, \dots, 5$$

$\omega^n = 1$



1

Τότε x^*

$$|x_k - 2| = \frac{1}{10}$$ καλή κατά-σταση

$$(x-2)^6 = 0 \iff \boxed{x-2=0}$$

καλή κατάσταση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$x^2 - 2ax + \beta =$
$(x - x_1)(x - x_2)$

7/3/14.

Άσκηση 1.2

α) $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$
$|x|$ μικρό
(χωρίς ανάπτυγμα Taylor)

β) $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

γ) $\log x - \log y = \log \frac{x}{y}$

δ) $\sin(\alpha + x) - \sin\alpha = 2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\left(\frac{\alpha + x}{2}\right)$ $\quad \alpha + \frac{x}{2}$
$|x|$ μικρή

1.3 $x^2 - 2\alpha x + \beta = 0$
$\alpha, \beta > 0, \quad \alpha^2 \gg \beta$

$x_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}$ ✓
$x_2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}$ ασταθής!

$x_1 x_2 = \beta \implies \boxed{x_2 = \frac{\beta}{x_1}}$

$x_2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta} = \frac{\beta}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}} = \frac{\beta}{x_1}$

Άσκηση 1.4

$x^3 + 3px + \cancel{3}2q = 0$
$p, q \in \mathbb{R} \quad p^3 + q^2 \cancel{\neq} > 0$

α) Έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα ρ, που δίνεται από τον τύπο

$\rho = u - v$ με

$$u = \left(\sqrt{p^3+q^2} - q\right)^{1/3}$$

$$v = \left(\sqrt{p^3+q^2} + q\right)^{1/3}$$

<u>τύπος του Cardano</u>

<u>Ύπαρξη πραγματικής ρίζας</u>

$f(x) := x^3 + 3px + 2q$

- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

  Άρα η f παίρνει και θετικές τιμές

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

  Άρα η f παίρνει και αρνητικές τιμές.

Σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής, η f παίρνει και την τιμή μηδέν, επομένως έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

<u>Μοναδικότητα πραγματικής ρίζας:</u>

$f'(x) = 3x^2 + 3p = 3(x^2+p)$

1η περίπτωση: $p \geq 0$

Τότε ισχύει $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

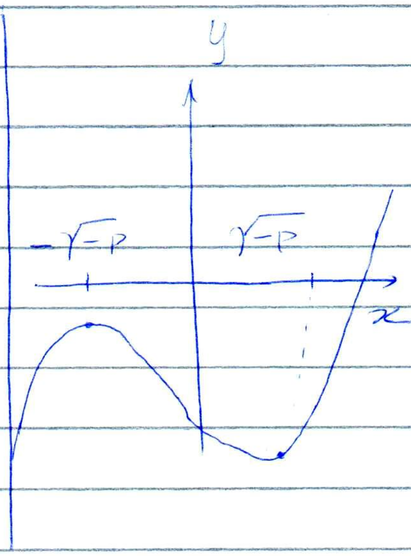
Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

Συμπέρασμα: Η f έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα

2η περίπτωση: $p < 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + p = 0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{-p}}$$

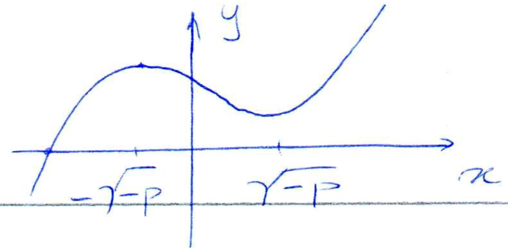
		$-\sqrt{-p}$		$+\sqrt{-p}$	
f'	$+$		$-$		$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$



$$\left.\begin{aligned} f(-\sqrt{-p}) &= 2(q - p\sqrt{-p}) \\ f(\sqrt{-p}) &= 2(q + p\sqrt{-p}) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

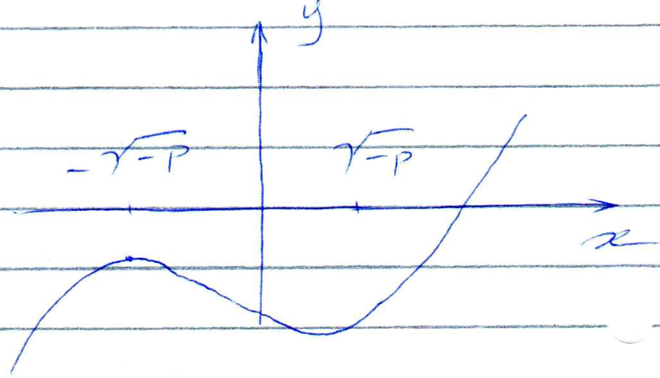
$$f(-\sqrt{-p})\, f(\sqrt{-p}) = 4\left(q^2 - p^2(-p)\right)$$

$$= 4\left(\underset{p}{q^3} + q^2\right) > 0 \text{ από την υπόθεση}$$



• $f(-\sqrt{-p}) > 0$

Τότε η f έχει στο $(-\infty, -\sqrt{-p})$ ακριβώς μία ρίζα, και καμμία ρίζα στο $(-\sqrt{-p}, \infty)$



• $f(\sqrt{-p}) \overset{<}{\cancel{>}} 0$

Τότε στο $(-\infty, \sqrt{-p})$ δεν υπάρχει ρίζα, ενώ στο $(\sqrt{-p}, \infty)$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

$$f(\rho) = (u-v)^3 + 3p(u-v) + 2q$$

$$= u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 + 3p(u-v) + 2q$$

$$= \cancel{-2q} - 3u^2v + 3uv^2 + 3p(u-v) \cancel{+2q}$$

$$= -3uv(u-v) + 3p(u-v)$$

$$= -3\underbrace{(uv-p)}_{=0}(u-v) = 0$$

Τώρα $uv = \left(p^3 + \cancel{q^2} - \cancel{q^2}\right)^{1/3} = p$

Παρασκευή, 21-3-14

FORTRAN, MATLAB

14/3/14

Άσκηση 1.4

$x^3 + 3px + 2q = 0$

$p^3 + q^2 > 0$

α) Ρίζα: $\boxed{\rho = u - v}$

$u = \left(\sqrt{p^3+q^2} - q\right)^{1/3}$

$v = \left(\sqrt{p^3+q^2} + q\right)^{1/3}$

β) $p^3 \gg q^2$

Τότε $u \simeq v \simeq \sqrt{p}$
ασταθής τρόπος!

γ) $u^3 - v^3 = \underline{(u-v)}(u^2+uv+v^2)$

$\Rightarrow u - v = \dfrac{u^3-v^3}{u^2+uv+v^2} = \dfrac{-2q}{u^2+p+v^2}$

>0

Άσκηση 1.7

α) $n \geq 3$

$y_n = n \sin\frac{\pi}{n}$

$Y_n = n \tan\frac{\pi}{n}$

$y_n = \pi - \dfrac{\pi^3}{6n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$

$$Y_n = \pi + \frac{\pi^3}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

(Προέκταση Richardson)
(extrapolation)

$$2y_n = 2\pi - \frac{2\pi^3}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$Y_n = \pi + \frac{\pi^3}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$2y_n + Y_n = 3\pi + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{2y_n + Y_n}{3} = \pi + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

<u>Άσκηση 1.12</u>

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+\alpha}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

α) Για $\alpha > 0$, ΝΔΟ:

$(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ <u>γνήσια φθίνουσα</u>

μηδενική (δηλ. $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$)

$$x^{n+1} < x^n \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^{n+1}}{x+\alpha} < \frac{x^n}{x+\alpha} \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+\alpha} dx}_{y_{n+1}} < \underbrace{\int_0^1 \frac{x^n}{x+\alpha} dx}_{y_n}$$

$$0 \leq y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\underbrace{x+\alpha}_{\geq \alpha}} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\alpha} dx$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq y_n \leq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{n+1}$$

$$0 \downarrow \quad \downarrow 0, \quad n \to \infty$$

$$\Rightarrow y_n \to 0, \; n \to \infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_n \leq \gamma_n \leq \beta_n \\ \alpha_n \to \alpha \\ \beta_n \to \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma_n \to \alpha$$

β) $\alpha >> 1$

$$y_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \boxed{\binom{n}{k} \alpha^k \frac{(1+\alpha)^{n-k} - \alpha^{n-k}}{n-k}}$$

$$+ (-\alpha)^n \log \frac{1+\alpha}{\alpha}$$

ευσταθής;

μεγάλος τουλάχιστον για ένα k!

$$\int_0^1 \frac{x^n}{x+\alpha}\,dx \overset{\omega = x+\alpha}{=}$$

$$\int_\alpha^{1+\alpha} \frac{(\omega-\alpha)^n}{\omega}\,d\omega$$

Άρα ένα τουλάχιστον ενδιάμενο άθροισμα έχει μεγάλη απόλυτη τιμή. Το τελικό άθροισμα, όμως, έχει πολύ μικρή απόλυτη τιμή.

<u>Συμπέρασμα</u>: αλγόριθμος είναι ασταθής

γ) Αναδρομικός τύπος

$$y_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+\alpha}\,dx = \log(x+\alpha)\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \log(\alpha+1) - \log\alpha = \log\frac{\alpha+1}{\alpha}$$

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+\alpha}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+\alpha)-\alpha x^{n-1}}{x+\alpha}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n-1}\cancel{(x+\alpha)}}{\cancel{x+\alpha}}\,dx - \int_0^1 \frac{\alpha x^{n-1}}{x+\alpha}\,dx$$

$$= \frac{1}{n} - \alpha \underbrace{\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+\alpha}\,dx}_{y_{n-1}}$$

Ευστάθεια;

$$\left.\begin{aligned} y_n &= \frac{1}{n} - \alpha y_{n-1} \\ \tilde{y}_n &= \frac{1}{n} - \alpha \tilde{y}_{n-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$y_n - \tilde{y}_n = -\alpha\,(y_{n-1} - \tilde{y}_{n-1})$$

$$\Rightarrow |y_n - \tilde{y}_n| = \alpha\,|y_{n-1} - \tilde{y}_{n-1}|$$

μεγάλο

<u>Ασταθής αλγόριθμος!</u>