09/03/2018

Άσκηση 1.2

α) $1-\cos x = ;$ για $|x|$ μικρό (Όχι Taylor)

$$\underbrace{1-\cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

→ δεν έχω πλέον αφαίρεση σχεδόν ίσων αριθμών άρα υπολογίζεται εύκολα.

Γενικά: $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$

β) $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

→ για μεγάλα θετικά x, y

γ) $\log x - \log y = \log \dfrac{x}{y}$ (για μεγάλα θετικά x, y)

δ) $\sin(a+x) - \sin a$, $|x|$ μικρό

Γενικά: $\sin x - \sin y = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$

– Άρα τώρα, $\sin(a+x) - \sin a = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\left(a + \dfrac{x}{2}\right)$

Άσκηση 1.3

$x^2-2ax+b=0$, $a,b>0$ και $a^2>>b$

Λύση

$x_1=a+\sqrt{a^2-b}$ ευσταθής τρόπος

$x_2=a-\underbrace{\sqrt{a^2-b}}_{\simeq a}$ άρα έχω αφαίρεση σχεδόν ίσων αριθμών $\rightarrow$ ασταθής τρόπος

Τι κάνω;

$\longrightarrow$ $x^2-2ax+b=(x-x_1)(x-x_2)=$

$=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2$

$\Rightarrow x_1x_2=b$

$\Rightarrow x_2=\frac{b}{x_1}$ ευσταθής τρόπος.

Αυτό που περιγράφεται παραπάνω είναι ο πολλαπλασιασμός του x_2 με τον συζυγή του,

$$x_2=a-\sqrt{a^2-b}=\frac{(a-\sqrt{a^2-b})(a+\sqrt{a^2-b})}{a+\sqrt{a^2-b}}=$$

$$=\frac{a^2-a^2+b}{a+\sqrt{a^2-b}}=\frac{b}{a+\sqrt{a^2-b}}=\frac{b}{x_1}$$

16/03/2018

Άσκηση 1.4

$x^3+3px+2q=0$, $p,q\in\mathbb{R}$
, με $p^3+q^2>0$

a) Να αποδείξουμε ότι η εξίσωση έχει ακριβώς μία πραγματική λύση ρ, η οποία μάλιστα δίνεται από τον τύπο του Cardano:

$$\rho = u - v \quad \text{με} \quad u=\left(\sqrt{p^3+q^2}-q\right)^{1/3}$$

$$v=\left(\sqrt{p^3+q^2}+q\right)^{1/3}$$

Λύση:

Θέτω: $f(x)=x^3+3px+2q$, f συνεχής και ορίζεται στο $\mathbb{R}$

• Ύπαρξη ρίζας:

Έχουμε, $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$

Παρατήρηση: όταν $x\to\infty$ μόνο ο όρος x^3 του πολυωνύμου μας ενδιαφέρει καθώς,
$x^3+3px+2q = x^3\left(1+\frac{3p}{x^2}+\frac{2q}{x^3}\right)$

→ Άρα τώρα, αφού $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, η f παίρνει θετικές τιμές.

→ Αντίστοιχα, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, οπότε η f παίρνει και αρνητικές τιμές.

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής, η f παίρνει και την τιμή μηδέν, οπότε έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

• <u>Μοναδικότητα (πραγματικής) ρίζας</u>

$$f'(x) = 3x^2 + 3\rho = 3(x^2+\rho)$$

<u>1η Περίπτωση</u>: $\rho \geq 0$

- Τότε η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε έχει το πολύ μία (πραγματική) ρίζα.

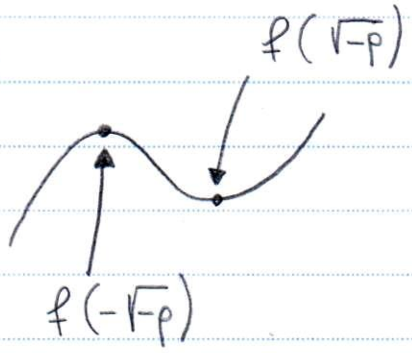
<u>2η Περίπτωση</u>: $\rho < 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2+\rho) = 0 \Leftrightarrow x^2+\rho = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 = -\rho \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\rho}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\rho}$		$\sqrt{-\rho}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

<u>Σχηματικά</u>:

f:



Τώρα, $f(-\sqrt{-p})\cdot f(\sqrt{-p}) = 4(p^3+q^2) > 0$

<u>Άρα</u>

i) Αν $f(-\sqrt{-p}) > 0$ τότε η f έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(-\infty, -\sqrt{-p})$ και καμία ρίζα στα διαστήματα $[-\sqrt{-p}, \sqrt{-p}]$ και $[\sqrt{-p}, +\infty)$

ii) Αν $f(-\sqrt{-p}) < 0$, τότε η f έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(\sqrt{-p}, \infty)$ και καμία ρίζα στα διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{-p}]$ και $[-\sqrt{-p}, \sqrt{-p}]$.

<u>Συμπέρασμα</u>: Σε όλες τις περιπτώσεις αποδείξαμε ότι η f έχει ακριβώς μια ρίζα.

— Θα αποδείξουμε τώρα ότι η $\rho = u - v$ είναι ρίζα.

Έχουμε,
$$f(\rho) = f(u-v) = (u-v)^3 + 3p(u-v) + 2q =$$
$$= \underbrace{u^3 - v^3}_{=-2q} - 3uv(u-v) + 3p(u-v) + 2q =$$

$$= -3(uv-p)(u-v)$$

• Για $\rho \neq 0$ έχουμε $u \neq v$

Αλλά,
$$uv = \left(\sqrt{p^3+q^2} - q\right)^{1/3} \cdot \left(\sqrt{p^3+q^2} + q\right)^{1/3} =$$
$$= \left[\left(\sqrt{p^3+q^2} - q\right) \cdot \left(\sqrt{p^3+q^2} + q\right)\right]^{1/3} =$$

$$= \left[\left(\sqrt{p^3+q^2}\right)^2 - q^2 \right]^{1/3} = \left(p^3 + \cancel{q^2} - \cancel{q^2} \right)^{1/3} = p.$$

β) Αν $p^3 >> q^2$ $(p>0)$, τότε ΝΔΟ ο τύπος του Cardano έχει πρόβλημα ευστάθειας.

Πράγματι, τότε $u \simeq \sqrt{p}$ και $v \simeq \sqrt{p}$, οπότε έχουμε αφαίρεση σχεδόν ίσων αριθμών.

γ) $u^3 - v^3 = (u-v)(u^2 + u \cdot v + v^2)$

⇝ ευσταθής τρόπος υπολογισμού του p.

$$p = u - v = \frac{u^3 - v^3}{u^2 + uv + v^2} = \frac{-2q}{u^2 + \underbrace{p}_{>0} + v^2}$$

→ Ευσταθής τρόπος!

Άσκηση 1.7

$$y_n = n \cdot \sin\frac{\pi}{n}$$

$$Y_n = n \cdot \tan\frac{\pi}{n}$$

→ Αποδεικνύεται με ανάπτυγμα Taylor ότι:

$$y_n = \pi - \frac{\pi^3}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$Y_n = \pi + \frac{\pi^3}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$2y_n = 2\pi - \frac{\pi^3}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$Y_n = \pi + \frac{\pi^3}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\Rightarrow 2y_n + Y_n = 3\pi + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2y_n + Y_n}{3} = \pi + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Τεχνική: Προέκταση κατά Richardson.

23/03/2018

Άσκηση 1.12

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a}\,dx \quad , n=0,1,2,\dots$$

α) $a>0$ ΝΔΟ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα και $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$

$$y_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+a}\,dx < \int_0^1 \frac{x^n}{x+a}\,dx = y_n$$

Για $0<x<1$
έχουμε $x^{n+1}<x^n$

→ Άρα $y_{n+1}<y_n$ και η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα.

$$0 \le y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a}\,dx \le \int_0^1 \frac{x^n}{a}\,dx = \frac{1}{a}\,\frac{1}{n+1}$$

$$0 \le y_n \le \frac{1}{a}\,\frac{1}{n+1}$$

Για $n\to\infty$ παίρνω, $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$

Υπόθεση : $\boxed{a>1}$

β) $$y_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} a^k \,\frac{(1+a)^{n-k} - a^{n-k}}{n-k} + (-a)^n \log\frac{1+a}{a}$$

↓

<u>Προκύπτει</u>: $$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a}\,dx \underset{x+a=y}{=} \int_a^{1+a} \frac{(y-a)^n}{y}\,dy$$

• Ευστάθεια: Κάποιοι από τους όρους,

$\binom{n}{k} a^k \frac{(1+a)^{n-k} - a^{n-k}}{n-k}$ έχουν μεγάλη απόλυτη τιμή,

οπότε αναγκαστικά και κάποιο από τα ενδιάμεσα αθροίσματα θα έχει μεγάλη απόλυτη τιμή. Το τελικό άθροισμα y_n έχει μικρή απόλυτη τιμή, επομένως αυτός ο τρόπος υπολογισμού είναι ασταθής.

γ) $y_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+a} dx = \left[\log(x+a)\right]_0^1 = \log(x+a) - \log(a) =$

$= \log \frac{1+a}{a}$.

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a} dx = \int_0^1 \frac{x^n + a x^{n-1} - a x^{n-1}}{x+a} dx =$$

$$= \int_0^1 \overbrace{\frac{x^n + a x^{n-1}}{x+a}}^{x^{n-1}} dx - \int_0^1 \frac{a x^{n-1}}{x+a} dx = \frac{1}{n} - a y_{n-1}$$

Αλγόριθμος:

$$\begin{cases} y_0 = \log \frac{1+a}{a} \\ y_n = \frac{1}{n} - a y_{n-1}, \ n \geq 1 \end{cases}$$

• <u>Ευστάθεια:</u>

$$\begin{cases} \tilde{y}_0 \\ \tilde{y}_n = \frac{1}{n} - a\tilde{y}_{n-1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε,

$$y_n - \tilde{y}_n = -a(y_{n-1} - \tilde{y}_{n-1})$$

→ Επαγωγικά έχουμε,

$$y_n - \tilde{y}_n = (-a)^n (y_0 - \tilde{y}_0)$$

Άρα,

$$|y_n - \tilde{y}_n| = a^n |y_0 - \tilde{y}_0|$$

<u>ασταθής</u> αλγόριθμος αφού το αρχικό σφάλμα πολλαπλασιάζεται με τον μεγάλο αριθμό a^n.

δ) Ευσταθής αλγόριθμος για τον υπολογισμό του y_{10}.

Αφού $0 \leq y_{20} \leq \frac{1}{a}\frac{1}{21}$, προσεγγίζοντας το y_{20} με $\tilde{y}_{20} = 0$ το σφάλμα είναι το πολύ $\frac{1}{21a}$.

Έχουμε $y_{n-1} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{n} - y_n\right)$

- Αλγόριθμος:

$$\begin{cases} \hat{y}_{20} = 0 \\ \hat{y}_{n-1} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{n} - \hat{y}_n\right), \quad n = 20, 19, 18, \dots, 11 \end{cases}$$

- Ευστάθεια:

$$y_{n-1} - \hat{y}_{n-1} = -\frac{1}{a}\left(y_n - \hat{y}_n\right)$$

$\Rightarrow$ επαγωγικά, $|y_{10} - \hat{y}_{10}| = \frac{1}{a^{10}} |y_{20} - \hat{y}_{20}|$

→ Το αρχικό σφάλμα καταστέλλεται. Ο αλγόριθμος είναι ευσταθής.

Άσκηση 1.13

(a) $$\left.\begin{aligned} x+y &= 1 \\ x+(1-a)y &= 0 \end{aligned}\right\}$$ κατάσταση;

• **Παρατήρηση:** $a=0$, Το πρόβλημα δεν έχει λύση.

Υπόθεση: $a \neq 0$

(b) $$\left.\begin{aligned} \hat{x}+\hat{y} &= 1+\varepsilon_1 \\ \hat{x}+(1-a)\hat{y} &= \varepsilon_2 \end{aligned}\right\}$$ Θέτω $u := \hat{x}-x$ και $v := \hat{y}-y$

με $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ μικρούς αριθμούς.

$\Rightarrow$ Αφαιρώντας κατά μέλη τις (b), (a) έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} u+v &= \varepsilon_1 \\ u+(1-a)v &= \varepsilon_2 \end{aligned}\right\}$$

Λύση: $$u = \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{a}$$

$$v = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{a}$$

Για $|a|$ μικρή, η κατάσταση είναι κακή, ενώ για $|a|$ μεγάλη η κατάσταση είναι καλή.

27/03/2018

Άσκηση 1.15

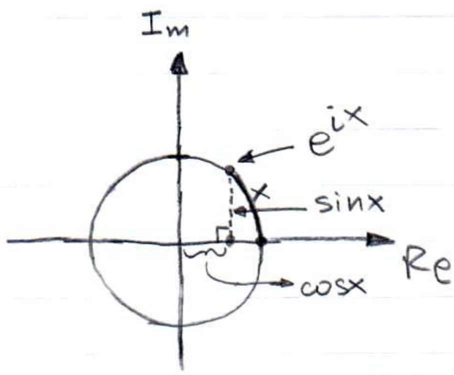
Οι ν-οστές ρίζες της μονάδας

$\nu \in \mathbb{N}$

$$z^{\nu} = 1 \Rightarrow z_k = e^{\frac{2\pi i k}{\nu}}, \ k = 0, \dots, \nu-1 \qquad (i = \sqrt{-1})$$

→ Αν έχω $x \in \mathbb{R}$ τότε,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{(Τύπος του Euler)}$$



$$|e^{ix}| = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{ix} = 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

→ Έχουμε ότι $(z_k)^{\nu} = \left(e^{\frac{2\pi i k}{\nu}}\right)^{\nu} = e^{2i\pi k} = 1$

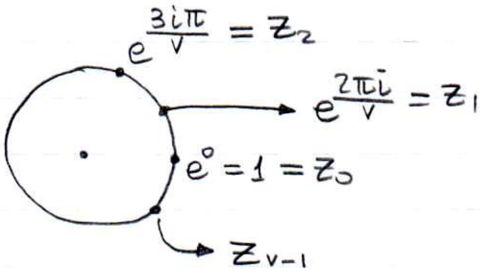
- Άρα έχουμε τα $z_0, \dots, z_{\nu-1}$ είναι λύσεις της $z^{\nu} = 1$ (δηλαδή ν-οστές ρίζες της μονάδας)

- Ισχυρισμός: $z_k \neq z_\ell$ για $k \neq \ell$

Προφανώς έχουμε $e^{ix} \neq e^{iy}$ για $x, y \in [0, 2\pi)$ και $x \neq y$

Όμως, $0 = \frac{2\pi \cdot 0}{\nu} < \frac{2\pi \cdot 1}{\nu} < \frac{2\pi \cdot 2}{\nu} < \dots \leq \frac{2\pi(\nu-1)}{\nu}$

και $\frac{2\pi(\nu-1)}{\nu} < 2\pi$, οπότε $1 = z_0$ και $z_k \neq z_\ell$ για $k \neq \ell$. Επομένως αυτές είναι όλες οι ν-οστές ρίζες της μονάδας.



Το $z_0 = 1, z_1, \dots, z_{\nu-1}$ είναι οι κορυφές του κανονικού ν-γώνου (για $\nu \geq 3$) που είναι εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο.

<u>Εφαρμογή</u>:

$$(x-2)^6 = 10^{-6}$$

$$\Leftrightarrow \quad 10^6 (x-2)^6 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad [10(x-2)]^6 = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$10(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{λύσεις}}}{x_k} - 2) = e^{\frac{2i\pi k}{6}}, \quad k = 0, \dots, 5$$

$$\Rightarrow \boxed{x_k = 2 + \frac{1}{10} e^{\frac{2i\pi k}{6}}, \quad k = 0, \dots, 5}$$

$$x_k - 2 = \frac{1}{10} \cdot e^{\frac{2i\pi k}{6}} \Rightarrow |x_k - 2| = \frac{1}{10} \underbrace{\left| e^{\frac{2i\pi k}{6}} \right|}_{=1}$$

$$\rightarrow |x_k - 2| = \frac{1}{10}$$