2. Επίλυση μη Γραμμικών Εξισώσεων

Ασκήσεις

2.4 Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία των προσεγγίσεων, την οποία δίνει η μέθοδος της διχοτόμησης για την εξίσωση $f(x) = 0$ με $f : [-1, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}.$$

Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} x_n = 1/2$.

2.6 Έστω ότι για μια συνάρτηση $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\exists C > 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \big|\varphi(x) - \varphi(y)\big| \geq C|x - y|.$$

Αποδείξτε ότι, αν x_0 δεν είναι σταθερό σημείο της φ, τότε η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n := \varphi(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, αποκλίνει.

2.7 Έστω $\varphi : [a, b] \to [a, b]$, $\varphi \in C^1[a, b]$, $\max_{a\leq x\leq b} |\varphi'(x)| < 1$, και $x^\star \in [a, b]$ σταθερό σημείο της φ. Αν $x_0 \in [a, b]$, $x_0 \neq x^\star$, $x_n := \varphi(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, τότε αποδείξτε για την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ότι ισχύουν:

α) Αν για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $\varphi'(x) > 0$, τότε η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει μονότονα προς το $x^\star$.

β) Αν για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $\varphi'(x) < 0$, τότε το $x^\star$ περιέχεται μεταξύ x_{i-1} και x_i, για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

2.8 Έστω $x_0 \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, με

$$x_{n+1} := \frac{1}{2} \exp \frac{x_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

συγκλίνει, και το όριό της βρίσκεται στο διάστημα $[0, 1]$.

2.9 Έστω $x_0 \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$,

$$x_{n+1} := \frac{1}{3}\big(2 + x_n - \mathrm{e}^{x_n}\big), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

συγκλίνει, και το όριό της βρίσκεται στο διάστημα $[0,1]$.

2.10 Για $x_0 \in [0,1]$, δίνεται η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$,

$$x_{n+1} := \frac{1}{6}\big(3 + 4x_n^2 - \mathrm{e}^{x_n}\big), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Αποδείξτε ότι η ακολουθία αυτή συγκλίνει, και το όριό της $x^\star$ βρίσκεται στο διάστημα $[0,1]$. Αποδείξτε επίσης ότι ισχύει

$$|x_n - x^\star| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,|x_1 - x_0|, \quad n \in \mathbb{N},$$

όπου $\alpha := (8-\mathrm{e})/6$.

2.11 Για $x_0 \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$,

$$x_{n+1} := \cos(x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

συγκλίνει προς το μοναδικό σταθερό σημείο $x^\star$ του συνημιτόνου, και ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^\star}{x_n - x^\star} = -\sqrt{1-(x^\star)^2}\,.$$

2.12 Έστω $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση και $x^\star$ ένα σταθερό σημείο της, τέτοιο ώστε η παράγωγος της φ να μηδενίζεται στο σημείο $x^\star$, $\varphi'(x^\star) = 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$, με μέσον το $x^\star$, τέτοιο ώστε η φ να ικανοποιεί στο $[a,b]$ τις υποθέσεις του θεωρήματος της συστολής, δηλαδή να είναι συστολή στο $[a,b]$ και, για κάθε $x \in [a,b]$, να ισχύει $\varphi(x) \in [a,b]$.

2.19 Έστω $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, $x^\star$ ένα σταθερό σημείο της, και έστω ότι η φ είναι $p \ge 2$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του $x^\star$. Έστω ότι

$$\varphi'(x^\star) = \varphi''(x^\star) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x^\star) = 0,$$

αλλά ότι $\varphi^{(p)}(x^\star) \ne 0$. Θεωρήστε την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_{n+1} := \varphi(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Αποδείξτε ότι, για x_0 αρκετά κοντά στο $x^\star$, η ακολουθία συγκλίνει στο $x^\star$ και ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^\star}{(x_n - x^\star)^p} = \frac{1}{p!}\,\varphi^{(p)}(x^\star),$$

δηλαδή ότι η τάξη σύγκλισής της είναι ακριβώς p.

2.20 α) *Μέθοδος του Νεύτωνα για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας.* Γράψτε τη μέθοδο του Νεύτωνα για την προσέγγιση της θετικής ρίζας της εξίσωσης $f(x) := x^2 - \alpha = 0$, όπου $\alpha > 0$, δηλαδή του αριθμού $\sqrt{\alpha}$, και αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n), $n \geq 0$, των προσεγγίσεων συγκλίνει στη $\sqrt{\alpha}$ για κάθε $x_0 > 0$. (Σημειώστε ότι ο υπολογισμός των όρων της ακολουθίας δεν απαιτεί την εξαγωγή τετραγωνικών ριζών.)

β) *Μέθοδος του Νεύτωνα για τον υπολογισμό του αντιστρόφου ενός αριθμού.* Γράψτε τη μέθοδο του Νεύτωνα για την προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης $f(x) := \alpha - 1/x = 0$, όπου $\alpha \neq 0$, δηλαδή του αριθμού $1/\alpha$, και διερευνήστε για ποιες αρχικές τιμές x_0 η ακολουθία (x_n), $n \geq 0$, συγκλίνει. (Σημειώστε ότι ο υπολογισμός των όρων x_n της ακολουθίας δεν απαιτεί διαιρέσεις. Συγκρίνετε επίσης με την Άσκηση 2.14.)

2.26 Έστω ότι ο πραγματικός αριθμός $x^\star$ είναι ρίζα πολλαπλότητας m μιας αρκετά ομαλής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Θεωρήστε την εξής παραλλαγή της μεθόδου του Νεύτωνα:

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Αποδείξτε ότι για x_0 αρκετά κοντά στο $x^\star$ η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο $x^\star$ και ότι έχει τάξη σύγκλισης $p \geq 2$.

2.32 Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ μια συγκλίνουσα ακολουθία και $x^\star$ το όριό της. Υποθέτουμε ότι η τάξη σύγκλισής της είναι $p > 1$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y_n := x_{2n}$, συγκλίνει επίσης στο $x^\star$ και ότι η τάξη σύγκλισής της είναι (τουλάχιστον) p^2.

2.33 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $x^\star$ ρίζα της f. Έστω $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε το $x^\star$ να είναι σταθερό σημείο της. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_{n+1} := \varphi(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, συγκλίνει στο $x^\star$ και η τάξη σύγκλισής της είναι $p > 1$. Κατασκευάζουμε τώρα μια "άλλη" επαναληπτική μέθοδο για την προσέγγιση του $x^\star$ ως εξής: Ορίζουμε τη συνάρτηση $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ως $\tilde{\varphi} := \varphi \circ \varphi$, δηλαδή $\tilde{\varphi}(x) := \varphi\big(\varphi(x)\big)$. Με $\tilde{x}_0 := x_0$ αποδείξτε ότι η ακολουθία $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\tilde{x}_{n+1} := \tilde{\varphi}(\tilde{x}_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, συγκλίνει στο $x^\star$ και η τάξη σύγκλισής της είναι p^2. Πόσοι υπολογισμοί τιμών της φ σε κάποιο σημείο ανά βήμα απαιτούνται για κάθε μία από τις "δύο" αυτές μεθόδους;
[*Υπόδειξη*: Παρατηρήστε κατ' αρχάς ότι $\tilde{x}_n = x_{2n}$.]

2.34 (Άλλη απόδειξη της Πρότασης 2.3.)

α) Έστω $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση και ρ σταθερό σημείο της φ. Για $x_n \in \mathbb{R}$ θέτουμε $x_{n+1} := \varphi(x_n)$. Αποδείξτε ότι αν η φ' είναι θετική στα σημεία μεταξύ

x_n και ρ, τότε οι αριθμοί $x_n - \rho$ και $x_{n+1} - \rho$ είναι ομόσημοι, ενώ αν η φ' είναι αρνητική, τότε οι αριθμοί $x_n - \rho$ και $x_{n+1} - \rho$ είναι ετερόσημοι. [Βλ. και την Άσκηση 2.7.]

β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. Έστω ρ ρίζα της $f(x) = 0$. Αποδείξτε ότι, για οποιαδήποτε αρχική τιμή $x_0 \in \mathbb{R}$, η ακολουθία που δίνει η μέθοδος του Νεύτωνα για την εξίσωση $f(x) = 0$ συγκλίνει στη ρίζα ρ.

[*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε το ερώτημα α) για να αποδείξετε ότι αν $x_0 < \rho$, ισχύει $x_1 > \rho$, και αν $x_n > \rho$, ισχύει επίσης $x_{n+1} > \rho$. Αποδείξτε ακόμα ότι για $n \geq 1$ ισχύει πάντοτε $\rho \leq x_{n+1} \leq x_n$. Οδηγηθείτε στο συμπέρασμα ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει, και εν συνεχεία ότι το όριό της είναι ο αριθμός ρ.]

2.35 Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα οποιοδήποτε διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι, για οποιαδήποτε αρχική τιμή $x_0 \in I$, η ακολουθία των προσεγγίσεων που δίνει η μέθοδος του Νεύτωνα για την εξίσωση $f(x) = 0$ είναι καλά ορισμένη.

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) := -f(x)$. Βεβαιωθείτε ότι, για την ίδια αρχική προσέγγιση $x_0 \in I$, η μέθοδος του Νεύτωνα παράγει την ίδια ακολουθία προσεγγίσεων για τις συναρτήσεις f και $\tilde{f}$, δηλαδή για τις εξισώσεις $f(x) = 0$ και $\tilde{f}(x) = 0$.

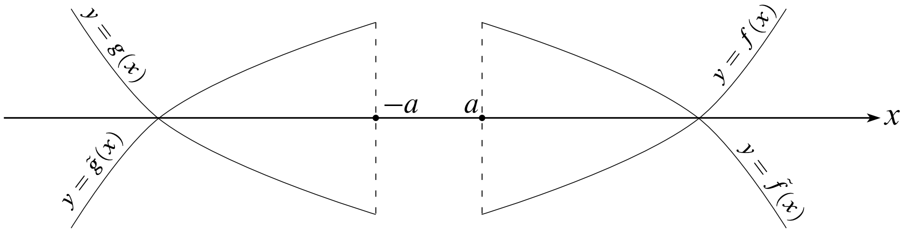
β) Θεωρούμε το διάστημα $J := \{x \in \mathbb{R} : -x \in I\}$ και τη συνάρτηση $g : J \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(-x)$. Με τον συμβολισμό στο α), αν η αρχική προσέγγιση είναι αυτή τη φορά $-x_0$, βεβαιωθείτε ότι η μέθοδος του Νεύτωνα παράγει την ακολουθία προσεγγίσεων $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ για τη συνάρτηση g.

γ) Τι μπορείτε να πείτε για την ακολουθία προσεγγίσεων που δίνει η μέθοδος του Νεύτωνα για τη συνάρτηση $\tilde{g} : J \to \mathbb{R}$, $\tilde{g}(x) := -f(-x) = -g(x)$;

Βλέπε και το Σχήμα 2.8.

2.36 Έστω $a \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε $f(a) > 0$ και $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$, για κάθε $x \geq a$. Αποδείξτε ότι, για κάθε αρχική προσέγγιση $x_0 \geq a$, η ακολουθία προσεγγίσεων $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα για την εξίσωση $f(x) = 0$ συγκλίνει στη μοναδική ρίζα $\rho > a$ της f.

Θεωρούμε επίσης μια συνάρτηση $f : (-\infty, -a] \to \mathbb{R}$ και υποθέτουμε ότι είτε $f(-a) < 0$ και $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, είτε $f(-a) > 0$ και $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, για κάθε $x \leq -a$. Αποδείξτε και πάλι ότι, για οποιαδήποτε αρχική προσέγγιση $x_0 \leq -a$, η ακολουθία προσεγγίσεων $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα για την εξίσωση $f(x) = 0$ συγκλίνει στη μοναδική ρίζα $\rho < -a$ της f.



Σχήμα 2.8: Σχηματική επεξήγηση της σχέσης μεταξύ των συναρτήσεων της Άσκησης 2.34.

[*Υπόδειξη*: Εφαρμόστε την Πρόταση 2.3 στις συναρτήσεις $\tilde{f}$, g και $\tilde{g}$ της Άσκησης 2.35.]

2.37 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, και ρ ρίζα της $f(x) = 0$. Υποθέτουμε ότι είτε α) $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$, είτε β) $f'(x) > 0$ και $f''(x) < 0$, είτε γ) $f'(x) < 0$ και $f''(x) > 0$, είτε δ) $f'(x) < 0$ και $f''(x) < 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x. Αποδείξτε ότι, για οποιαδήποτε αρχική προσέγγιση $x_0 \in \mathbb{R}$, η ακολουθία που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα για την εξίσωση $f(x) = 0$ συγκλίνει στη ρίζα ρ.
[*Υπόδειξη*: Στην περίπτωση α) εργαστείτε όπως στην Πρόταση 2.3 ή την Άσκηση 2.34. Οι άλλες περιπτώσεις ανάγονται στην προηγούμενη· βλ. την Άσκηση 2.36.]

2.38 Έστω $x^\star \in \mathbb{R}$ και $p > 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi : (x^\star - 1, x^\star + 1) \to \mathbb{R}, \varphi(x) := x^\star + |x - x^\star|^p$. Βεβαιωθείτε ότι, για $x_0 \in (x^\star - 1, x^\star + 1)$, η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με $x_{n+1} := \varphi(x_n), n \in \mathbb{N}_0$, είναι καλά ορισμένη, συγκλίνει στο $x^\star$ και η τάξη σύγκλισής της είναι ακριβώς p.
[*Σημείωση*: Στην προκειμένη περίπτωση, αν ο p δεν είναι φυσικός αριθμός, η συνάρτηση φ δεν είναι αρκετά ομαλή. Γιαυτό η τάξη σύγκλισης της ακολουθίας δεν είναι αναγκαστικά φυσικός αριθμός· συγκρίνετε με την Άσκηση 2.19.]